TURING 图灵新知



The Pythagorean Theorem: A 4000-year History

勾股定理

悠悠4000年的故事

【以】Eli Maor 著　　冯速 译





人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵新知



勾股定理

悠悠4000年的故事

【以】Eli Maor 著　　冯速 译

人民邮电出版社
北　京

图书在版编目（CIP）数据

勾股定理：悠悠4000年的故事/（以）马奥尔（Maor, E.）著；冯速译. —北京：人民邮电出版社，2010.7
（图灵新知）
书名原文：The Pythagorean Theorem: A 4000-Year History
ISBN 978-7-115-21691-5

I. ①勾… II. ①马… ②冯… III. ①勾股定理－普及读物 IV. ①O123.3-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第231905号

内 容 提 要

本书以勾股定理为线索，梳理了科学历史上一些重要的事件、发明和发现的来龙去脉，把欧几里得几何、代数几何、微积分、黎曼几何以及爱因斯坦的相对论串成一条逻辑清晰的演变轨迹。全书深入浅出，能让读者从一个侧面对整个数学的发展有一个总体的认识。

本书适合中学生至大学生等各层次数学爱好者阅读，也是研究数学史极有价值的参考书。

图灵新知

勾股定理：悠悠4000年的故事

◆ 著 [以] Eli Maor
译 冯 速
责任编辑 傅志红
执行编辑 陆春凌

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街14号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：880×1230 1/32
印张：9.25 彩插：4
字数：232千字 2010年7月第1版
印数：1-4 000册 2010年7月北京第1次印刷

著作权合同登记号 图字：01-2009-1522号

ISBN 978-7-115-21691-5

定价：35.00元

读者服务热线：(010) 51095186 印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010) 67171154

译者序

和绝大部分读者一样，我在中学也学过毕达哥拉斯定理，即勾股定理。[①]所以，在拿到这本书的时候，我猜测这本书可能会如以往的史书一样不厌其烦地讲解毕达哥拉斯定理的各种证明方法，也可能会以毕达哥拉斯定理为引子，讲解从毕达哥拉斯发现这一定理以来的数学史或科学史。

但是，仔细阅读之后，我发现我的想法错得离谱，同时也被本书震撼了。这根本不是一本简单的历史书，也不是简单地介绍毕达哥拉斯定理证明方法的图书。本书以毕达哥拉斯定理为线索，梳理了科学历史上一些重要的事件、发明和发现的来龙去脉，把欧几里得几何、代数几何、微积分、黎曼几何以及爱因斯坦的相对论串成一条逻辑清晰的演变轨迹。令我震撼的就是这一切都与毕达哥拉斯定理紧密相关，这是我之前从未意识到的。从书中，我们不仅可以看到这些课题的发展历程，更重要的是可以看到这些课题在整个科学、社会发展历史中的发展经纬、来龙去脉。读完本书，读者会有“哦，原来是这样!”的感慨，也会重新发现我们在中学所学的毕达哥拉斯定理及其思想在科学史上的重要作用。

现在，我把这本书翻译出来，推荐给初高中学生，希望他们了解所学的毕达哥拉斯定理在整个科学发展中的重要作用，切实体会科学发展中的思维过程；推荐给大学生，希望他们了解微积分、黎曼几何及相对论这些高深的科学课题中直观、初等、古老的知识所起的作用，从中体会科

---

① 在国外，勾股定理通常称为毕达哥拉斯定理。为符合国内的习惯叫法，本书书名使用“勾股定理”，而正文中延用英文版叫法——毕达哥拉斯定理。——编者注

研的思维方式；推荐给我国科学史特别是数学史的学者们，希望他们借鉴本书作者对科学史的研究、组织和论述方法和思考角度，编写出我们自己的对科研发展起推动作用的优秀科学史书籍。

在中国，我们的祖先早就知道了勾股定理，比毕达哥拉斯发现这一结果要早上许久。为什么中国没能形成相似的演变轨迹呢？这一问题令我百思不得其解。

译者水平有限，误译之处，敬请读者指正、谅解。

前　言

> 直至今天，毕达哥拉斯定理仍然是整个数学中最重要的一个定理。
>
> ——布罗诺夫斯基，《人的跃升》，p.160

毕达哥拉斯定理虽然生根于几何学，但是，人们普遍认为，毕达哥拉斯发现的这个定理在科学的几乎所有分支都有其身影，无论是纯理论科学还是应用科学。至今为止已经知道了它有 400 多种证明方法，这一数字仍在增长。这其中有后来成为美国总统的人写下的原创证明，有爱因斯坦年仅十二岁时写下的证明，也有一位盲人姑娘的证明。有些证明简单得令人惊叹，有些证明却异常地复杂。这个定理本身也有好多名字，如毕达哥拉斯定理、斜边定理，或者简单地称为欧几里得 I 47，之所以这样叫，是因为它是欧几里得《几何原本》卷 I 中的第 47 个命题。这一富有特色的图案（图 P-1）当作人类的宇宙身份证，当我们寻找地球外生物时，可以使用这个身份证来自我介绍。这一定理在很多应用领域起着重要作用，当然其被滥用甚至误用的情况也时有发生。对一门学科来说，它有着无法比拟的魅力，它以各种方式进入我们的日常文化生活之中，它出现在邮票上、T-恤衫上、艺术和文学作品中，甚至出现在著名音乐剧的歌词之中。无论如何，它都是数学中最有名的定理。任何一个学生，不管对数学多么恐惧，都会记起他自己的学生时代曾学过这么一个定理。

今天，我们认为毕达哥拉斯定理是一个代数关系，$a^2+b^2=c^2$，当已知直角三角形两个边的长度时，根据这个关系式可以求得这个直角三角形的第三条边的长度。但是，当年毕达哥拉斯却不这样看它，对他来说，这是一个关于面积的几何陈述。大约在公元 1600 年，随着现代代数学的

出现，这个定理才拥有了我们现在所熟悉的代数形式。因此我们必须知道，从毕达哥拉斯首次证明它并由此确立其不朽的地位开始，探索这一定理已经经历了大约 2500 年的演变过程。其实他不是第一个发现这一定理的人，在他之前至少一千年，古巴比伦人就已经知道了这个定理，那时，中国人可能也已经知道。

很多作家都评论说毕达哥拉斯定理很美。1895 年，查尔斯·路德维希·道奇森，也就是人们所熟悉的刘易斯·卡罗尔写道："它如毕达哥拉斯最早发现它的时候一样美丽耀眼。"[1]他有资格这样说，因为他不但是写过《爱丽丝漫游奇境记》和《镜中奇缘》的知名作家，还是一位天才数学家。但是，有谁指出了它美丽所在吗？2004 年，《物理世界》杂志要求读者写出科学世界中最美的 20 个方程。名列第一的是欧拉公式 $e^{i\pi}+1=0$，其后依次是麦克斯韦的 4 个电磁场方程、牛顿的力学第二定律 $F=ma$，以及毕达哥拉斯定理 $a^2+b^2=c^2$，它仅赢得了第四名。[2]

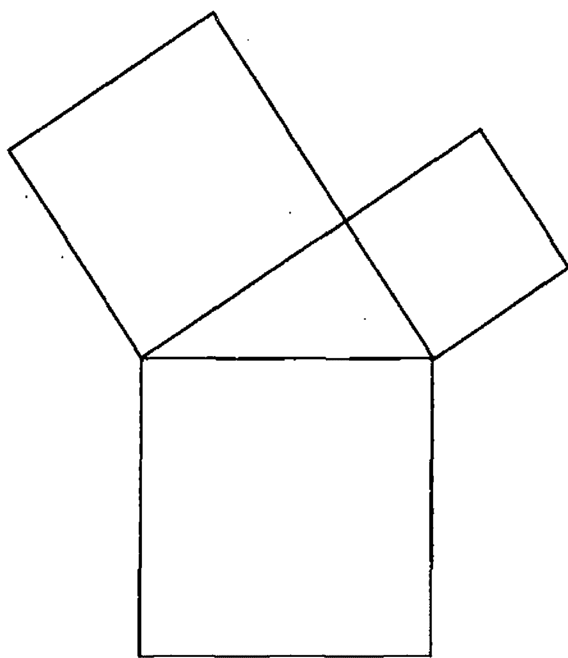


图 P1　毕达哥拉斯定理：欧几里得的观点

注意，比赛所要角逐的是最美的*方程*，而不是它们所代表的定律或定理。当然，美是一种主观上的东西，但是对数学家来说，一个定理或证明有什么样的资格才称得上美，他们有相当一致的意见。首要的一条就是对称性。例如，考虑三角形的 3 条高，它们总是相交于一点（它的 3 条中线和 3 条角平分线也是如此）。以其彻底的对称性来说，这一陈述相当地优雅：没有哪条边或哪个顶点比其他边或顶点地位更高；所有要素之间都是完全平等的。再考虑这样的定理：过圆内一点 P 作一条弦 AB，则积 $PA \times PB$ 是常数，即对所有过点 P 的弦这个积都是常数（图 P-2）。同样，它们也完全平等：每一条弦都和与 P 相关的其他弦拥有完全相同的地位。

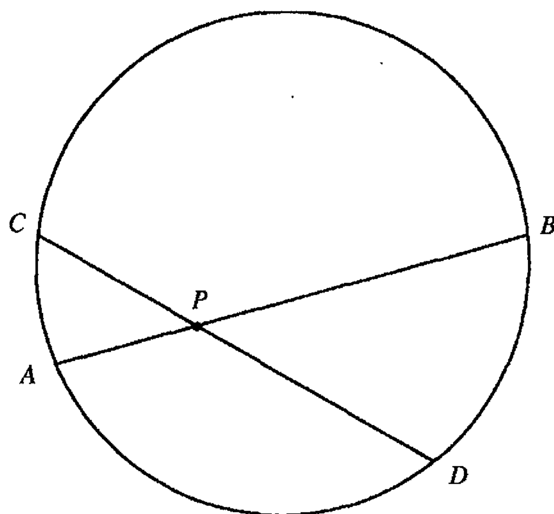


图 P2　$PA \times PB = PC \times PD$

在这种意义下，毕达哥拉斯定理显然不是平等的。首先，它只适用一个非常特殊的情况，直角三角形；然后，它要挑出一条边——斜边，这条边的作用与其他两条边的作用完全不同。词 hypotenuse（斜边）来自希腊语 hypo（意思是“下面”、“底下”、“向下”）以及 teinen（意思是“拉长”）。如果我们以它的斜边为底看这个直角三角形，那么它呈现在欧几里得《几何原本》中的模样确实还和这个词有点儿靠谱（参见图 P-1）。

中国人把它称之为“弦”，两点之间被拉紧的绳子（如同琵琶上的弦）。希伯来语中的斜边是'yeter，它可能来自于 mei'ter（绳子）或 yo'ter（更多），即比直角边更长。而我们即使用现代的眼光看这个三角形，把它的一条直角边平放，另一条直角边垂直放置（图 P3），斜边上的正方形也以一个奇怪的角度而引人注目。这是一个美丽的定理吗？也许是吧。

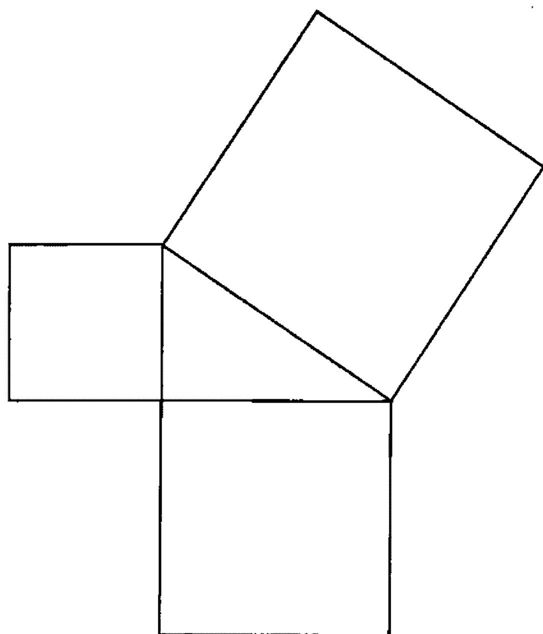


图 P3 毕达哥拉斯定理：现代观点

如果说毕达哥拉斯定理不是那样精致，那么是什么使得毕达哥拉斯定理得以吸引全世界的人？毫无疑问，一部分原因是几个世纪以来人们给出了大量的证明方法。卢米斯（1852—1940）是俄亥俄州的一位古怪的数学教师，他用毕生的精力收集了当时已知的所有证明，总共 371 个，并把它们编写成《毕达哥拉斯命题》（1927）一书。[3]卢米斯声称，在中世纪，要求取得数学学位的学生必须提供毕达哥拉斯定理的原创证明，他说这激发了学生和老师们不断提供新的、有创意的证明方法。其中有些证明以相似三角形为基础，另一些证明基于割补法，还有一些证明则

根据代数公式，也有少数证明使用了向量，甚至有一些“证明”（也许使用“演示”更好些）使用了物理方法。在以色列特拉维夫科学博物馆中，我看到了一个“演示”方法，在一个旋转的树脂玻璃制的直角三角形三条边上的正方形之间，让有色液体自由流淌，可以证明斜边上的正方形里的液体体积等于其他两个正方形里的液体体积之和。

毕达哥拉斯定理吸引人的另外一个理由是，它是整个数学中使用最频繁的定理。打开任意一本数学公式手册，你几乎在每一章中都可以看到表达式 x^2+y^2，它通常是嵌在更大的表达式里面，而且几乎都是 x^2+y^2，而不是 x^3+y^3，或者这些变量的其他幂。这一表达式都直接或间接地与毕达哥拉斯定理相关。例如，三角学就是如此，这门学科中的公式好像多得没边。无论是 $\sin^2x+\cos^2x=1$、$1+\tan^2x=\sec^2x$ 还是 $1+\cot^2x=\csc^2x$，这些等式都像是毕达哥拉斯定理的幽灵一样——实际上，它们就是被称为毕达哥拉斯等式。数学的其他分支也同样如此，从数论和代数学到微积分和概率论，在所有这些学科中，毕达哥拉斯定理担负着重要的角色。



本书中，我将从 4000 年前的古巴比伦开始叙述，一直到我们生活的今天，一路追寻毕达哥拉斯定理的演变，探讨它对数学及我们的文化所带来的普遍影响。我没有打算全面讲述这几百个证明，这几乎是不可能完成的任务，也是一件徒劳的工作，因为有些证明之间差异很小。就连卢米斯的杰出编撰也不完整，自从 1940 年（他去世的那年）他那本书的第二版出版后，新的证明又不断涌现出来，甚至就在我写这本书的时候，还有新的证明出现。[4]

与我之前的几本书一样，本书的读者应是对数学史感兴趣的人。只需要有高中代数、几何知识以及一些粗浅的微积分知识就足以读懂。几

个需要更深数学知识的课题归入到附录中。因为我要偶尔引用我之前写过的几本书，这里给出它们的书名：《无穷之旅：关于无穷的文化史》（1991），《e 的故事：一个常数的传奇》（1994），《三角之美：边边角角的趣事》*（1998；这 3 本书都是由普林斯顿大学出版社出版的）。其他两本经常提到的文献是霍华德·伊夫斯（Howard Eves）的《数学史概论》（Saunders，1992）和大卫·尤金·史密斯（David Eugene Smith）的《数学史》《卷 1：初等数学史概况》和《卷 2：初等数学的特别话题》（Dover，1958）。引用时只写伊夫斯（Eves）和史密斯（Smith）。

我要感谢我的妻子 Dalia，写这本书的时候她一直鼓励我，并认真地校对手稿；感谢 Robert Langer 对这本书所给出的意见和非常有价值的建议；感谢 Vickie Kearn，她是普林斯顿大学出版社本书的编辑，自始至终对我给予支持和鼓励；感谢 Debbie Tegarden、Carmina Alvarez、Dimitri Karetnikov 以及出版社其他成员在这本书出版过程中对手稿的呵护；感谢 Alice Calaprice，她是过去15年来我忠实的技术编辑；感谢 Joseph L.Teeters，他为我提供了某些难寻的文献信息；感谢 Howard Zvi Weiss，他翻译了书中几首德语诗；感谢 Barbara Niemic、Jeff Niemic 和 Deborah Ward 所付出的特殊努力，他们在爱尔兰都柏林找到了那块匾并给它拍了照片（见图11-1），这是用来纪念 William Rowan Hamilton 爵士发现四元数乘法定律的；还要感谢伊利诺伊州 Skokie 市公共图书馆的全体工作人员，他们为找到相当数量的难寻的文献而付出了努力。对他们的帮助表示由衷的感谢。

2006 年 7 月

* 《e 的故事：一个常数的传奇》和《三角之美：边边角角的趣事》将与本书同期上市。——编者注

注释和参考文献

[1] *A New Theory of Parallels* (1895)。

[2] 《纽约时报》，2004 年 10 月 24 日，p.12。

[3] （全美数学教师学会，1968）关于这本书的更多内容可以在第 8 章中找到。

[4] 有几个专门为毕达哥拉斯定理开设的网站，给出很多最新证明。本书参考书目中列出了部分网站。

目　录

开　篇　语

英国剑桥，1993 年

> 记得毕达哥拉斯吗？
>
> ——《纽约时报》，1993 年 6 月 24 日

数学方面的新闻很少登上报纸的头版头条，但 1993 年 6 月 24 日是个例外。那一天，《纽约时报》以“终于听到了欢呼‘找到了’，古老数学之谜获解”为大标题报道了一个头版头条消息。前一天，大西洋的另一边，一名 40 岁的英国数学家宣布他已经解决了最著名的数学问题，一个看似简单却困扰了数学家 350 年的问题。

处于兴奋之中的这位数学家就是安德鲁 · 怀尔斯，他的母校是英国剑桥大学，现为美国新泽西州的普林斯顿大学教授。在题为“模形式、椭圆曲线以及伽罗瓦表示”的三场系列讲演的最后，他激动地宣布了这一消息。实际上，也不是所有数学家对这一课题都很熟悉，更何况是外行人了。但是，有传闻说，这位讲演人也许会让人大吃一惊，所以整个讲演大厅坐满了听众。在这位讲演人最后得出结论的时刻，我们能够感受到听众的紧张心情。最后，怀尔斯博士用下面这句话结束了他的讲演：“因此，这表明费尔马大定理是成立的。证毕。”[1]人们涌到最近的计算机终端，用当时还很新奇的电邮向全球发送这一新闻。

怀尔斯的宣告所隐含的事实具有人类故事的所有特点。费马（1601—1665）是一名法国律师，他在业余时间从事数学研究，1637 年他对看似很简单的方程 $x^n+y^n=z^n$ 的可能整数解做了一个猜想。$n=1$ 时，这个方程是平凡的：任意两个整数的和显然等于第三个整数，所以我们有 $x^1+y^1=z^1$。$n=2$ 的情况更加有趣。有很多，实际上应该说有无穷多的整数三元组（x，

y，z）满足 $x^2+y^2=z^2$，例如（3，4，5）和（5，12，13）。当然，这样的三元组使我们立即联想到毕达哥拉斯定理：它们代表 3 条边长都为整数的直角三角形。所以，数学家真正要解决的是下一步，即寻找方程 $x^3+y^3=z^3$、$x^4+y^4=z^4$ 等的整数解。这件事一直还没有答案。

费马认为他证明了对任意大于 2 的 n，这一方程没有整数解。在公元前 3 世纪亚历山大数学家丢番图的一篇论文复本的空白处，费马草草写下了几句成为不朽经典的话：

> 把一个 3 次幂分成两个 3 次幂、把一个 4 次幂分成两个 4 次幂，或者把任意次幂变成二个相同次幂，是不可能的。我已经找到这一结论的美妙证明，但是空白处太窄，无法写下。[2]

在接下来的 350 年间，无数的数学家、数学爱好者和狂热者都试图"重建"费马的"美妙证明"，但所有的人都失败了。法国科学院和德国科学院分别设立了大奖以奖励第一个给出正确证明的人，这两个大奖还没有人去领取。[3]

这个问题倒并非毫无进展。瑞士伟大的数学家欧拉（1707—1783）于 1753 年证明了 $n=3$ 情况下费马猜想。其他特殊情况下的证明也陆续被攻克，而且借助于计算机，人们已经证明了这一猜想对于所有 100 000 以下的 n 都是正确的。但是，这并没有证明对于所有 n 这一猜想都正确。费马大定理（FLT）的证明问题还是没有得到解决。[4]

当怀尔斯加入这场辩论时，人们已经有了一些研究积累。1954 年，日本数学家谷山丰（1927—1958）对于椭圆曲线给出了一个猜想。随后的研究，特别是德国萨尔州立大学的格哈德·费赖博士和加利福尼亚大学伯克利分校的里贝特博士的工作，都显示了谷山猜想与费马大定理之间的关系：如果前者成立，那么后者也成立。之后，怀尔斯在其小阁楼上，进行了 7 年近似与世隔绝的研究，证明了谷山猜想的确是正确的；

随即，作为附加结果，FLT 也是正确的。

然而，事情并非一帆风顺。他把这份长达 200 页的证明递交给有能力且愿意仔细审查的数学家进行评审，结果发现这份证明中存在一个小小的逻辑漏洞。但是，怀尔斯并没有被吓倒，他再次把自己封闭起来，又经过一年的艰苦努力，在剑桥大学教师泰勒的帮助下，他弥补了这一漏洞。现在，我们认为 FLT 已经被证明了，最终成为名符其实的定理。[5]

但是，为什么单单这个问题一直被认为是数学中没有得到解决的最著名问题呢？首先是其表面上的简单性：任何高中生都明白它的意思。另外，费马的深不可测的注释的神秘性增强了这个故事的情趣。（大多数学家认为，实际上他没有给出正确的证明，因为破解这一问题所需要的工具在他那个时代还无法使用。）总之，FLT 给我们的感觉是历史完成了一个轮回。对于费马所研究的这一类型的方程，大约 4000 年前巴比伦人就开始研究了。我们的故事就从这里开始。

注释和参考文献

[1] 转载自《纽约时报》1993 年 6 月 23 日，p.D22 的一篇文章。没有报导怀尔斯的原话。

[2] 费马这一著名的描述原文是用拉丁语写成的，这一描述有许多英语版本。本书所使用的版本来自伊夫斯的著作，p.355。

[3] 法国的大奖是一枚奖章和 300 法郎，这一大奖分别在 1815 年和 1860 年公布了两次。德国的大奖是在 1908 年公布的，奖金是 100 000 马克，在当时这是一笔数额巨大的奖金。到了 1929 年由于通货膨胀，这笔奖金贬值到大约 7 500 马克（相当于今天的 4 400 美元）。这两个大奖引来无数的申报人，他们大多数是业余人士，或是一些有少量数学知识或是根本不懂数学的狂热分子。

[4] 费马大定理（Fermat's Last Theorem）这一名字在两个方面用词不当：在怀尔斯完成证明之前，这个“定理”还只是一个猜想；另外，它不是费马的最后猜想，而只是他关于数学的诸多猜想中最后一个没能解决的。

[5] 不用说，本书所给的 FLT 的描述只是粗略的描述。对此更详细的内容，请参阅 Simon Singh 的优秀著作 *Fermat's Enigma:The Epic Quest to Solve the World's Greatest Mathematical Problem* (Walker, 1997)。

第 1 章

美索不达米亚，公元前 1800 年

> 更确切地说，希腊传统中许多被称为"毕达哥拉斯的"财富实际上是"巴比伦人"的。
>
> ——奥托·诺伊格鲍尔，巴特尔·范德瓦尔登引用自《科学之觉醒》，p.77

从东边的幼发拉底河和底格里斯河到西边的黎巴嫩山脉之间，这片广阔的土地就是著名的新月沃地地区，也就是在今天的伊拉克共和国境内，4000 年前一个伟大的古老文明诞生了：美索不达米亚。在过去的两个世纪中发现的无数的泥板见证了一个民族曾经在商业和建筑业的繁荣，见证了其对天文事件的精确记录，见证了其在艺术和文学领域的卓越成就，同时也见证了汉摩拉比统治下史上第一部法典的创建。学者们只研究了大量考古学珍品中的一小部分，大量的泥板还沉睡在世界各地的博物馆的地下室里，静静地等候被破译，进而向我们展示古老巴比伦人的日常生活。

在这些泥板中，人们对一块标有"YBC 7289"的泥板进行了全面研究，它是耶鲁大学古巴比伦收藏品中的 7289 号（图 1-1）。这块泥板的年代是汉摩拉比统治时期的古巴比伦，大约是公元前 1800 年到公元前 1600 年。泥板上有一个倾斜的正方形及其两条对角线，一条边的旁边和水平对角线的下方各有一些雕刻标记。这些标记是楔形文字，用铁针雕刻在松

软的粘土上，然后再把这块粘土放在太阳底下风干或者放入炉中烘烤。后来证明这些文字是数字，是以 60 进制的特殊巴比伦记数体系写成的。这种 60 进制本质上用的是现代 10 进制记数体系的 1~59，但没有 0。个位使用竖立的 Y 形楔形文字，十位使用水平书写的类似文字表示。让我们分别用 | 和一表示这些符号。例如，23 可以写成一 一 | | | 。当一个数超过 59 时，就利用类似于 10 进制下把一个数分成 10 个一组的方法，

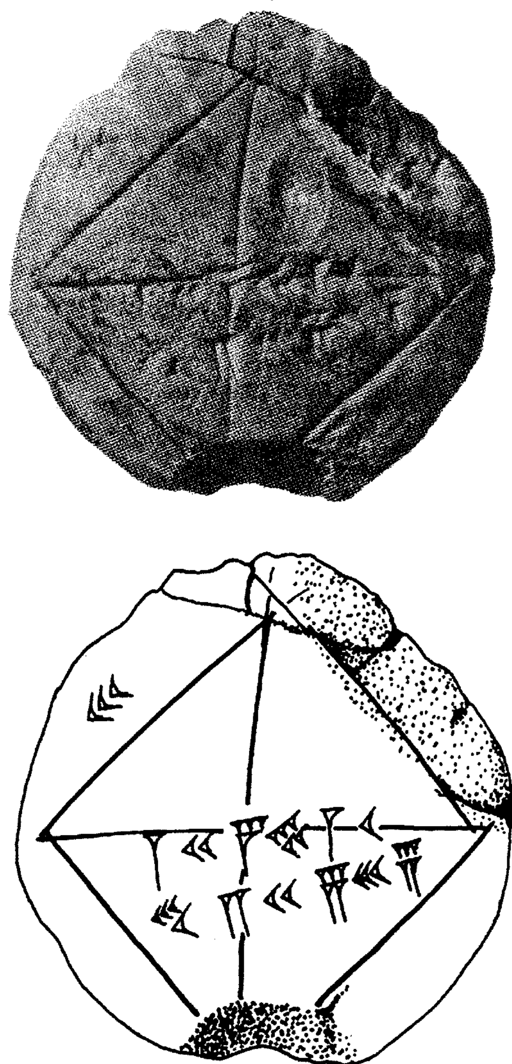


图 1-1 YBC 7289

把这个数分成 60 个一组。因此，在 60 进制下，2413 可以写成 $40 \times 60+13$，也可以写成— — — — —| | |（通常为了节省空间，一组相同的符号被堆到一起）。

因为古巴比伦人没有表示“空槽”的符号，也就是现代的数字 0，因此如何把数分成组通常会产生歧义。例如，在上面的例子中，数— — — — —| | | 还可以代表 $40 \times 60^2+13 \times 60=144\ 780$，或者也可能表示 $40/60+13=13.166$。另外，抄写员可能把— — — — 和 —| | | 之间的空隙留得太小，因此有可能把这个数误读成— — — — —| | |，也就是 $50 \times 60+3=3\ 003$。因此，要根据上下文才能对这些数做出正确的解释，破译这些古老的文件是摆在学者们面前的另一个挑战。

幸运的是，对于 YBC 7289 来说，这一任务相对容易一些。左上侧的数很容易确认为 30。而水平对角线上的数是 1;24,51,10（这里，我们使用现代记数法表示巴比伦数字，用逗号把 60 进制的数位分开，用分号把一个数的整数部分与小数部分分开）。如果用 10 进制写这个数的话，我们可以写成 $1+24/60+51/60^2+10/60^3=1.414\ 213$，这不是别的，就是 $\sqrt{2}$ 的 10 进制值，精确到十万分之一！把这个数乘以 30 后，我们得到 42.426 389，它的 60 进制表示是 42;25,35——这个数就是水平对角线下面的那一行数。我们得到的结论无疑是：巴比伦人知道正方形的对角线与它的边的关系 $d=a\sqrt{2}$。而这就意味着他们熟知毕达哥拉斯定理，或者，最起码他们知道正方形对角线的特殊情况（$d^2=a^2+a^2=2a^2$），这要比这个定理被命名为毕达哥拉斯定理的时间早 1000 年。

关于这块泥板，有两件事值得特别提出。首先，它证明了古巴比伦人知道如何相当精确地计算一个数的平方根，事实上，这个精确度达到了现代 8 位计算器计算的精度[1]。更引人注目的是这份文献的目的：它可能是要给出一个例子来说明如何计算任意正方形的对角线，方法就是把正方形

的边长直接乘以 1;24,51,10。而大多数人可能都遵循一个明显而又乏味的过程：从 30 开始，把它平方，再将其结果加倍，最后取这个数的平方根 $d=\sqrt{30^2+30^2}=\sqrt{1800}=42.4264$，四舍五入到小数点后第 4 位。但是，假设你要反复对不同大小的正方形进行计算，那么就必须每次对一个新数重复这一过程，这是个相当乏味的任务。这位不知名的抄写员在大约 4000 年前把这些数刻入一块泥板上，给我们展示了一个简单的方法：只需把这个正方形的边乘以 $\sqrt{2}$（图 1-2）。多么简单！

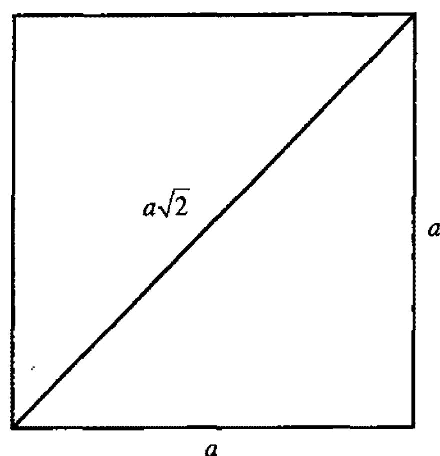


图 1-2　一个方形和它的对角线

但是，还有一个问题需要回答：为什么这个抄写员以 30 为例？有两种解释：一是这块泥板对应某个特殊的情形，很可能是边长为 30 的一块土地，人们需要求出这块土地的对角线长度；或者更有可能的是，他有意选 30，因为 30 是 60 的一半，因此很容易做乘法。在 10 进制中，把一个数乘 5 很容易做，只需把这个数除以 2，再把 10 进制小数点向右移动一位。例如，$2.86\times5=(2.86/2)\times10=1.43\times10=14.3$（更一般地，$a\times5=a/2\times10$）。类似地，在 60 进制中，把一个数乘以 30 很容易做，就是把这个数减半，然后把“60 进制小数点”向右移动一位（$a\times30=a/2\times60$）。

让我们看一下对 YBC 7289 的情况如何进行这一工作。回想一下，

1;24,51,10 是 $1+24/60+51/60^2+10/60^3$ 的缩写。把这个数除以 2，得到 $1/2+12/60+25\frac{1}{2}/60^2+5/60^3$，现在我们必须重写这个数，使得 60 的幂的系数是整数。为此把第一项和第三项的 1/2 替换成 30/60，得到 $30/60+12/60+(25+30/60)/60^2+5/60^3=42/60+25/60^2+35/60^3=0;42,25,35$。最后，把 60 进制小数点向右移动一位，得到 42;25,35，这就是对角线的长度。因此，似乎这位抄写员是出于实用原因而选择了 30，这样可以使他的计算更容易。



如果说 YBC 7289 是巴比伦人掌握初等几何的一个明显的例子，那么同一时期的另一块泥板则揭示出更多的事实：它表明巴比伦人还掌握了代数过程[2]。普林顿（Plimpton）322 号收藏品（它在哥伦比亚大学的普林顿收藏中的编号是 322。参见图 1-3）的上面有一个 4 列表格，乍看起来好像是商业交易的记录。然而，仔细考究揭示出了完全不同的东西：这块泥板是毕达哥拉斯三元组列表，满足 $a^2+b^2=c^2$ 的正整数三元组（a,b,c）。例如，(3,4,5)、(5,12,13) 和 (8,15,17) 都是这样的三元组。由毕达哥拉斯定理[3]，每一个这样的三元组代表一个边长为整数的直角三角形。



图 1-3 普林顿 322 号

遗憾的是，这块泥板的左边部分遗失，但是，根据这些边上残存的现代胶粘剂证明，遗失的部分是在这块泥板被发现之后折断的，因此我们还存有一线希望，有一天它可能出现在古玩市场上。要感谢学者们细致的研究，遗失的部分已得到相当程度的再建，现在，我们可以相对容易地研究这块泥板。表 1-1 用现代记数法再现其上的内容。一共 4 列，最右列原文冠以“它的名字”，只是给出了 1~15 的连续行号。第 2 列和第 3 列（从右向左记数）分别冠以“计算出的对角线长度”和“计算出的宽”，给出了对角线的长度和矩形短边的长度，也就是直角三角形斜边的长度和短边的长度。我们分别用字母 c 和 b 标识这两列。例如，第 1 行的表项 b=1,59 和 c=2,49，它们所表示的数分别是 1×60+59=119 和

表 1-1　普林顿 322

$(c/a)^2$	b	c	
[1,59,0,]15	1,59	2,49	1
[1,56,56,]58,14,50,6,15	56,7	3,12,1	2
[1,55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1,]5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1,]48,54,1,40	1,5	1,37	5
[1,]47,6,41,40	5,19	8,1	6
[1,]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1,]41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
[1,]38,33,36,36	9,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45	1,15	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1,]27,0,3,45	7,12,1	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1,]23,13,46,40	56	53	15

注：括号里的数字是后人重建的。

$2\times60+49=169$。经过快速计算，我们得到另外一条边的长度为 $a=\sqrt{169^2-119^2}=\sqrt{14\,400}=120$；因此（119,120,169）是一个毕达哥拉斯三元组。另一个例子，从第 3 行我们看到 b=1,16,41=$1\times60^2+16\times60+41=4601$，$c$=1,50,49=$1\times60^2+50\times60+49=6\,649$；因此 $a=\sqrt{6\,649^2-4\,601^2}=\sqrt{23\,040\,000}=4\,800$，于是毕达哥拉斯三元组是（4 601,4 800,6 649）。

这个表格有一些明显的错误。第 9 行，我们发现 b=9,1=$9\times60+1=541$，c=12,49=$12\times60+49=769$，这 2 个数不能形成毕达哥拉斯三元组（第三个数 a 不是整数）。但是，如果我们用 8,1=481 取代 9,1，就可以得到一个整数值 $a=\sqrt{769^2-481^2}=\sqrt{360\,000}=600$，结果产生一个三元组（481,600,769）。这似乎属于“印刷”错误，这位抄写员可能瞬间注意力分散，把 9 个而不是 8 个标记刻到软土上，而且一旦这块泥板在太阳下风干，他的错误就被载入历史。还有一个例子，第 13 行，我们有 b=7,12,1=$7\times60^2+12\times60+1=25\,921$ 和 c=4,49=$4\times60+49=289$，这两个数不能构成毕达哥拉斯三元组。但是我们注意到，25 921 是 161 的平方，而数 161 和 289 可以形成三元组（161,240,289）。好像是这位抄写员忘记去取 25 921 的平方根。另外，在第 15 行，我们发现 c=53，而正确的数应该是这个数的 2 倍，即 $2\times53=106$=1,46，于是产生一个三元数组（56,90,106）[4]。这些错误使得我们觉得在过去的 4000 年里，人类的本性没有发生什么改变，这位不知名的抄写员所犯的错误也不过就如同在一次考试中教授忠告学生们要注意的“一个小小的愚蠢错误”而已[5]。

最左列是最令人好奇的。它的标题又一次提到了“对角线”，而余下内容的真实意义却不是很清楚。但是，当我们仔细观察它的项时，一个惊人事实就会显现出来：这一列给出了比率 c/a 的平方，即 $\csc^2 A$ 的值，其中 A 是边 a 的对角，csc 是三角学中的余割函数（见图 1-4）。针对第 1 行，我们来验证一下。我们有 b=1,59=119 和 c=2,49=169，根据这两个数，

我们得到 $a=120$。因此$(c/a)^2=(169/120)^2=1.983$，四舍五入到 3 位小数。这的确是第 4 列中的对应项：$1;59,0,15=1+59/60+0/60^2+15/60^3=1.983$。（我们还应该注意，巴比伦人不使用“空槽”符号，因此可以用多种方法解释一个数，必须根据上下文做出正确的解释。在刚才引用的例子中，我们假设第一位的 1 代表个位而不是六十位。）读者还可以验证这列中的其他项，确定它们是否等于$(c/a)^2$。

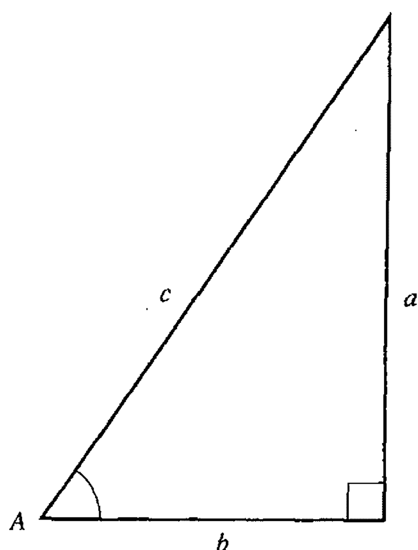


图 1-4　一个角的余割：$\csc A=c/a$

但是，马上出现几个问题：这个表格中项的顺序是随意的还是遵循某个潜在的模式？巴比伦人是如何寻找这些可以形成毕达哥拉斯三元组的数的？另外，为什么他们对这些数感兴趣，特别是对比率$(c/a)^2$感兴趣？第一个问题相对容易回答：如果逐行比较值$(c/a)^2$，我们会发现这些值从 1.983 逐项递减到 1.387，所以似乎很有可能的是，这些项的顺序是由这个序列决定的。另外，如果我们计算第 4 列中每一项的平方根，即比率 $c/a=\csc A$，然后再找到对应角 A，就会发现 A 从 45°逐项增加到 58°。因此，我不仅对寻找毕达哥拉斯三元组感兴趣，而且对确定对应的直角

三角形的比率 c/a 也感兴趣。如果有一天遗失的部分重现，这种假设也许会得到证实，因为遗失的部分可能还包含 a 和 c/a 所对应的列。如果是这样的话，普林顿 322 将成为历史的第一个三角函数表而留传下去。

对于巴比伦数学家是如何发现这些三元组的问题，包括（4 601,4 800,6 649）这样数值巨大的三元组，仅有一个比较合理的解释，即他们一定知道某个算法，而这个算法于 1500 年后在欧几里得的《几何原本》中被公式化：设 u 和 v 是任意两个正整数，且 $u>v$，那么下面三个数形成一个毕达哥拉斯三元组。

$$a=2uv,\quad b=u^2-v^2,\quad c=u^2+v^2 \tag{1}$$

（如果我们另外要求 u 和 v 具有相反奇偶性，即一个是偶数，则另外一个是奇数，而且要求它们除 1 外没有公因子，那么 (a,b,c) 是素毕达哥拉斯三元组，即 a，b 和 c 除 1 外没有公因子。）容易证明，由方程（1）给出的数 a，b，c 满足方程 $a^2+b^2=c^2$：

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(2uv)^2+(u^2-v^2)^2\\&=4u^2v^2+u^4-2u^2v^2+v^4\\&=u^4+2u^2v^2+v^4\\&=(u^2+v^2)^2=c^2\end{aligned}$$

这一论述的逆命题是：每一个毕达哥拉斯三元组都可以用这种方法找到，其证明要稍微困难一些（参见附录 B）。

因此，普林顿 322 表明，巴比伦人不仅熟知毕达哥拉斯定理，而且他们对数论也有初步了解，并把其中的计算技巧和理论应用于实践。这一切相当了不起，因为在这之后 1000 年，希腊历史上才产生第一位伟大的数学家。

注释和参考文献

[1] 关于巴比伦人是如何取 $\sqrt{2}$ 的近似值的讨论，可以参见附录 A。

[2] 下面的相关内容改编自《三角之美》，还参考了 Otto Neugebauer 的 *Exact Sciences in Antiquity*（Dover，1969），卷 2，参见伊夫斯，pp.44-77。

[3] 更精确地说，它的逆命题是：如果一个三角形的边满足方程 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形。

[4] 但是，这不是一个素三元组，因为它的元素有公因子 2，可以把它化简为（28,45,53）。这两个三元组代表两个相似三角形。

[5] 第 2 行出现了第 4 个错误，项 3,12,1 应该是 1,20,25，产生三元组（3367, 3456,4825）。这个错误还没有恰当的解释。

补充1　埃及人知道它吗

> 埃及人一定使用过公式$[a^2+b^2=c^2]$，否则他们不可能建造出金字塔，但是他们从没有把这当作一个有用的理论加以描述。
>
> ——乔伊·哈克姆，《科学的故事》，p.78

美索不达米亚以东约800 km，沿尼罗河岸，另外一个古老的文明国度埃及在这里繁荣壮大。这两个文明国度和平共处超过3000年，大约从公元前3500年直到希腊时代。这两个国度都有发达的书写技巧，热衷于天文观测，而且对他们的军事胜利、商业交流和文化传统有着非常详尽的记录。但是，不同的是，巴比伦人把这一切记录在泥板上，这的确是一个不易损坏的书写材料；而埃及人使用的却是纸莎草纸，显然这是一种相当易碎的材料。如果不是因为干燥的沙漠气候，他们的文献早就灰飞烟灭了。尽管如此，我们对古埃及的了解还是少于对美索不达米亚的了解。我们主要是通过在各朝代埃及统治者的墓穴里发现的艺术品来了解他们，或者通过少部分残留下来的纸莎草纸卷轴，以及他们的神殿和碑文上的象形文字来了解他们。

众多的埃及神殿中最著名的就是金字塔，前后大约历时1500年人们建造金字塔来赞美统治者法老们生前身后的荣耀。大量的文学作品都有关于金字塔的描述，遗憾的是，其中很多文学作品是虚构的，而不是事实。金字塔吸引很多崇拜者的祭奠，这些人发现了这些墓碑与宇宙中事物间的隐含着的关联，从π的值到黄金分割，再到星相。借用著名埃及古物学家理查德·基灵斯的话来说："作家、小说家、记者以及虚构小说的写手们在19世纪发现了一个新话题'金字塔'，对这个课题的了解得

越少，或者理解得越不清楚，那么他们可以驾驭的想象空间就越大。”[1]

显然，建造每条边长为230 m、高为146 m的基奥普斯大金字塔这样如此巨大的墓碑需要大量的数学知识，而且可以肯定这些知识当中一定包含毕达哥拉斯定理。但事实是这样的吗？我们对古埃及数学状况的了解主要来源于莱茵德纸草书，该书收集了84个问题，分别涉及算术、几何和初等代数等领域。该书是由苏格兰的埃及古物学者亨利·莱茵德于1858年发现的，这本纸草书长近5.5 m、宽近4 m。它保存得非常完好，是我们得到的近乎完整的最古老的数学教科书（该书现存于伦敦大英博物馆）。[2]这本纸草书是由一位名叫阿摩塞的抄写员在大约公元前1650年写成的，在西方称其为A'h-mose。但是，正如阿摩塞告知我们那样，这本书不是他自己的著作，他只是把一份大约为公元前1800年的文献抄写下来而已。书中对84个问题中的每一个问题都有详细的求解过程，有些问题还配有图。最有可能的是这本著作是抄写员学校使用的训练手册，因为这是分配给皇家抄写员的文字工作的一部分，这些抄写员通常要做的是读（reading）、写（writing）、算（arithmetic），即我们现代所说的“3R”。

在莱茵德纸草书的84个问题中，有20个几何问题，这些问题大都是研究诸如求圆形谷仓的体积，或求给定尺寸的一块土地的面积等问题（求土地面积问题对埃及人来说是一个非常重要的问题，他们的生计与尼罗河每年的洪水息息相关）。其中有5个问题是关于金字塔的问题，但在这些问题中并没有直接或间接地引用毕达哥拉斯定理。其中重复出现的一个概念就是金字塔边的斜度，显然这一问题对施工人员来说非常重要，因为他们必须确保4个面相等而且有相同的斜度。[3]但是毕达哥拉斯定理呢？却一次也没有提到。

当然，就像考古学家喜欢说的那样，缺乏证据不能证明不存在。然

而，很有可能的是，莱茵德纸草书是对抄写员、建筑师或者收税员等一类有知识的人在其生涯中所遇到的数学问题的一种概括，没有提到毕达哥拉斯定理的事实充分提示埃及人不知道这个定理。[4]据说，他们是使用带有等距离间隔的绳节的绳子丈量距离。那么可以这样推理：有3-4-5绳节的绳子一定会诱发埃及人发现3-4-5三角形是一个直角三角形，从而推断出$3^2+4^2=5^2$的事实。但是，没有支持这种假设的任何证据。更没有如有些作家所描述的那样，他们使用了3-4-5这样的绳子来构造直角，使用铅垂线似乎更容易实现这样的目的。对于这种情况，引用3个著名的古代数学学者的话作为概括最好。

> 在90%（关于数学历史）的书籍中，有一本论述了埃及人知道边长为3、4和5的直角三角形，并使用这个直角三角形摆出了一个直角。这一陈述有多少价值呢？完全没有。
>
> ——范德瓦尔登[5]

> 没有迹象表明埃及人有什么毕达哥拉斯定理的概念，尽管有一些关于“拉绳定界先师”[司绳]的没有事实根据的故事，推测他们在有3+4+5=12个绳结的绳子的帮助下构造出直角三角形。
>
> ——斯特洛伊克[6]

> 好像没有证据表明他们知道三角形（3,4,5）是直角三角形。确确实实是这样，根据最近的权威著作（皮特，《莱茵德纸草书》，1923），埃及数学中没有什么东西说明埃及人知道毕达哥拉斯定理或者这个定理的任何特殊情况。
>
> ——希思[7]

当然，考古学家们也有可能在某一天挖出某份文献，它展示一个矩形，有如 YBC 7289 那样标明它的边和对角线。但是，在这一发现之前，我们不能断定埃及人知道直角三角形的 3 条边之间的关系。

注释和参考文献

[1] *Mathematics in the Time of the Pharaohs*（Dover，1982），p.237。

[2] 参阅 Arnold Buffum Chace 著的 *The Rhind Mathematical Papyrus:Free Translation and Commentary with Selected Photographs, Transcriptions, Transliterations and Literal Translations*（全美数学教师学会, 1979）。

[3] 关于这一话题，参阅《三角之美》，pp.6-9。

[4] 根据史密斯的著作（卷 2, p.288），在卡洪发现了一本十二朝代（公元前 2000 年）的纸草书，这里给出 4 个毕达哥拉斯三元组，其中有一个是 $1^2+(3/4)^2=(1/4)^2$（当去掉分母后，这等价于三元组（3，4，5））。这些三元组是否指的是直角三角形的边不得而知。

[5] Arnold Dresden 翻译的 *Science Awakening*（John Wiley, 1963），p.6。范德瓦尔登进而给出了这一陈述的理由，并说："重复复制[埃及人使用 3-4-5 为边的直角三角形摆出一个直角的假设]使得它成为'人人皆知的事实'。"

[6] *Concise History of Mathematics*（Dover, 1967），p.24。斯特洛伊克（1894—2000）是一名出生于荷兰的学者，从 1926~1960 年一直执教于麻省理工大学。在他的讣告中，美国麻省理工大学迪博纳科学技术史研究所所长 Evelyn Simha 说，斯特洛伊克是"确立数学史基础知识半壁江山的大师"（《纽约时报》2000 年 10 月 26 日, p.A29）。他几乎工作到生命结束，享年 106 岁。

[7] 《几何原本》，卷 1（Cambridge University Press, 1962），p.352。

第2章

毕达哥拉斯

> 数统治宇宙。
>
> ——毕达哥拉斯学派座右铭

在有关数学史的任何一本书中你都可以找到他的图片，有一脸长胡须和一双充满智慧的眼睛的威严老者（图2-1）。但事实是，我们不知道这个令人敬畏的人物是谁。毕达哥拉斯是历史上最神秘的人物之一，我们对他了解很少，而且所知的可能大都是虚构而不是事实，这些都是生活在几百年后的历史学家写成的。所以你所看到的他的每一件事都是值得怀疑的，几乎可以肯定地说这个有胡须的肖像是值得怀疑的[1]。

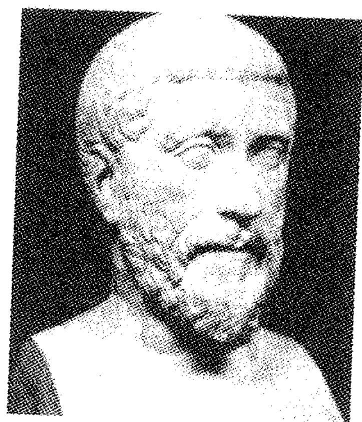


图 2-1 毕达哥拉斯

根据传说，毕达哥拉斯大约于公元前 570 年出生于爱琴海的萨摩斯岛，它距小亚细亚海岸（现在的土耳其）不远。这个小岛以东不远的地方，在一个名叫米利都（现代的土耳其）的海岸城镇里住着著名的哲学家泰利斯，他是为后世千年创立知识体系的希腊第一学者。所以，尽管我们无法肯定，但我们可以猜测年轻的毕达哥拉斯在这位大师的指导下学习，他点燃了毕达哥拉斯对数学和哲学的热情。然后，毕达哥拉斯开

始游历于古代世界文明的圣地，其中包括埃及和波斯，尽可能地从那里汲取当地的文学、宗教、哲学和数学知识。这期间学到的东西对这位年轻的学者产生了深刻的影响。

当毕达哥拉斯返回他出生的那个小岛时，他感受到波利克拉特斯君主的残酷统治，所以大约公元前 530 年他离开了萨摩斯岛，定居于一个叫克罗顿的偏远希腊村落（现意大利东海岸）。在那里，他创办了一所学园（School），对后世的学者产生了巨大影响。在导师的指导下，这些毕达哥拉斯信徒们学习了当时存在的所有学科的知识，特别是哲学、数学和天文学。但是，这不仅仅只是一所学园：他们还建立了一个教派，也就是一个要求成员间彼此相互忠诚的兄弟会。毕达哥拉斯信徒发誓对他们所讨论的东西保密，这可能是为了防止被他们的敌人嘲讽，而他们的敌人人数众多。或者，可能是这样的协定可以使他们容易远离大多数村民每天所从事的艰苦的日常工作。无论什么理由，他们的保守秘密制造了历史悲剧：这使得他们的所有讨论都没有更多的听众，至少在刚开始是这样的。我们对这些毕达哥拉斯信徒的了解主要来源于后代的作家，他们常常争先恐后地赞美这位伟大的导师[2]。

原始资料缺乏的另一个原因是，毕达哥拉斯信徒按照东方的传统，通过口头进行知识传播。当时书写材料十分匮乏：埃及的纸草大约在公元前 650 年引入希腊，但是在毕达哥拉斯时代还很短缺。当时人们还不知道羊皮纸，而长篇的哲学讨论又不适合写在泥板上。因此，知识主要通过口头语言一代一代地流传下去，只留下极少数的文字。另外，出于对他们的领袖的尊重，这些毕达哥拉斯信徒所做的很多发现都被归功于毕达哥拉斯本人，所以真正的发现者几乎不为人知。

毕达哥拉斯的第一个重要的科学发现是在一个意想不到的领域：声学。故事是这样的。有一天在街上散步，他听到了从铁匠铺传来的响亮

声音。于是他停下来探个究竟，发现这个声音来自铁匠的锤子敲打铁板后铁板的震荡：铁板越大，所产生的声音就越低。于是，毕达哥拉斯用铃和充满水的玻璃杯做实验，发现了同样的关系：物体的体积越大，它的声音就越低。

然而，毕达哥拉斯没有满足于这种定性的关系。他继续研究了一排绳子的振动（图2-2），发现绳子的声音音调与它的长度成反比。想象一下，质地相同、粗细相同的两条绳子用相同的力度拉直，一条绳子的长度是另外一条绳子的2倍。于是，短绳子将以2倍于长绳子的频率震动，用音乐语言来说，两条绳子相差一个八度。类似地，长度比为3∶2的两条绳子对应于一个五度音程，4∶3的比率对应于一个四度音程，以此类推（“八度”、“五度”、“四度”等名字源自于音阶中这些音程的位置）。这是一个重要发现，第一次有人把自然现象进行精确的数量表示。在某种意义上，这标志着数学物理的开始。



图2-2 发现和弦定律的毕达哥拉斯

这里离毕达哥拉斯的下一个发现还相差一步。如果让这两条绳子同

时振动，那么它们产生一个音乐上的和弦。毕达哥拉斯最大的喜悦是，他发现了绳子长度按简单的比率会产生悦耳的和弦，即谐和音。上面所提到的八度、五度、四度中重要的是间隔，毕达哥拉斯把它称之为“纯音程”。相反，复杂的比率很难产生悦耳的和弦，例如，比率 9∶8 产生一个二度音程，显然是一个不和谐的和弦。因此，毕达哥拉斯得出一个结论：数字比率支配着音乐和弦定律，乃至整个宇宙。这成为毕达哥拉斯学派的固有观念，是他们的世界观的基石。

要充分理解这种认识上的巨大飞跃，我们需要知道在古希腊，音乐与算术（特别是数论）、几何和天文学同等重要。的确，这 4 个科目成为中世纪的 4 门高级学科，它们是每一个受教育者都希望掌握的核心课程。正因为人们认为音乐与数学同等重要，因此这两者间产生影响就不足为奇了。（回想一下数学中单词“调和”的使用频率，如调和平均、调和级数和调和函数，等等。）所以，毕达哥拉斯学派推理说，如果数统治着音乐调和的规律，那么它们也一定统治着宇宙中的每一件事情。

毕达哥拉斯信徒们对数的固有情结产生了一系列结果，有一些结果对科学的进步是有益的，而有一些则对科学的进步是有害的。一方面，他们对数的忠爱刺激他们去研究数（这里指的是正整数）的数学性质，从而，他们播散了数论的种子，这些种子成长为现代数论。但是，如同任何痴迷一样，如果疯狂地追求，你就会失去常态，无论是对音乐的和谐还是对物质宇宙，毕达哥拉斯信徒们对数至高无尚的坚定信仰束缚了他们去考虑那些可以更好地解释自然的其他思想。由于迫使自然法则服从于完美、和谐以及对称的希腊理想，毕达哥拉斯信徒阻碍物理科学的发展达 2000 年之久。

希腊的宇宙哲学最能说明这一问题。毕达哥拉斯信徒认为地球是一个静止不动的球体，悬浮在宇宙的中央，而其他的星星就如同宝石一样

镶嵌苍穹之中，围绕地球做着完美的每周期 24 小时运动。太阳、月亮以及当时已知的行星在它们各自的圆形轨道内绕着地球运动，伴随宇宙的运动而运动。当这些圆轨道不完全符合观察数据时，公元前 3 世纪这些轨道被称之为本轮的小圆取代，本轮的中心沿着大圆轨道运动。最终本轮数量不断增加，越来越多的本轮加到已有的本轮当中，于是这个体系变得很麻烦，因而丧失了实用价值。然而，希腊的世界蓝图统治着宇宙达 2000 多年。之所以发生这样的事情是因为对希腊人来说，他们不希望天体沿除圆轨道之外的任何其他轨道运动：它必须是一个圆，这是所有图形中最完美的。甚至到了哥白尼时代，虽然他在其巨作《天体运行论》一书中摒弃了地球在宇宙中至高无尚的中心位置，而把太阳作为宇宙的中心，但是他仍然使用完美的圆形轨道。只有到了 1609 年，开普勒才摒弃了圆形轨道，用椭圆（后来牛顿把椭圆扩展为抛物线和双曲线）轨道取代了它们。



现在，我们回到数学。毕达哥拉斯信徒对数的研究起初是作为宗教上的探求，有点类似于现代见神论（Kaballah）。对于他们来说，每一个数带有一个符号特征。1 是所有数的生成元，因为每一个数都可以通过它反复地累加而被创造出来，因此，它有特殊的地位，不能只把它看成一个数。2 和 3 分别表示女人和男人，而 5 是它们的和。5 也是正多面体的数目，所谓的正多面体就是所有面都是相同正多边形的多面体（图 2-3）：有 4 个相同的三角形的正四面体、立方体（有 6 个相同的正方形）、正八面体（有 8 个相同的三角形）、正十二面体（有 12 个相同的五边形）和正二十面体（有 20 个相同的三角形）。根据毕达哥拉斯学派的说法，这 5 个正多面体代表形成宇宙的 5 个元素：火、地、风、水和

包围这一切的宇宙苍穹。因此，5 就获得了某种程度上的神秘地位，五角形成为毕达哥拉斯学派的标志（图 2-4）。

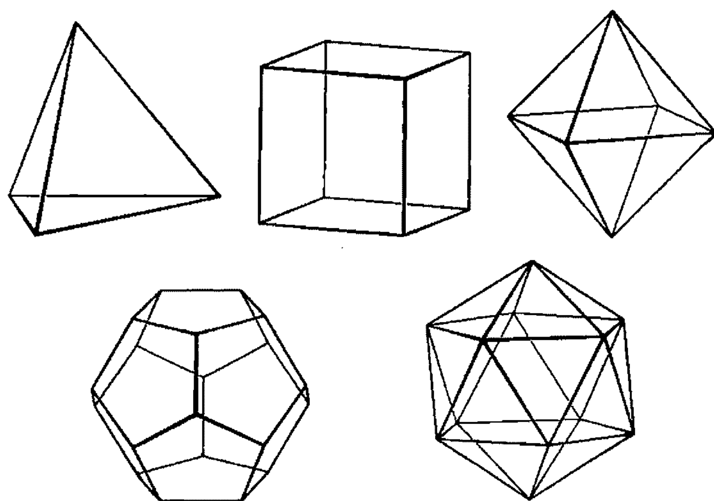


图 2-3　五个正则或柏拉图体

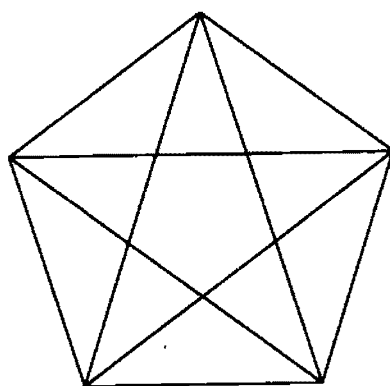


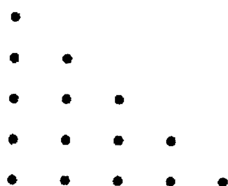
图 2-4　五角形：毕达哥拉斯学派的标志

比 5 更神秘的是 6，它是第一个完全数。如果一个数的所有正因子（包括 1 但不包括这个数本身）之和等于它本身，那么这个数就是完全的。6 的正因子是 1、2 和 3，因为 1+2+3=6，所以 6 是第一个完全数。接下来的 3 个完全数字是 28(=1+2+4+7+14)、496(=1+2+4+8+16+31+62+124+248)和 8 128(=1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1 016+2 032+4 064)。

希腊人仅知道这 4 个完全数，第五个完全数是 33 550 336，它是在 1456 年被发现的。在写这本书的时候，已经知道 43 个完全数，它们全都是偶数。现在还不知道是否存在奇完全数，也不知道完全数的个数是有限的还是无限的。[3]

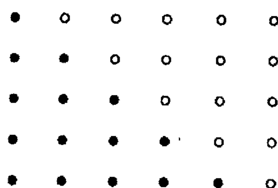


毕达哥拉斯信徒特别感兴趣的数是象形数，这样的数可以表示成按某种规则模式排列的点。考虑前 5 个数的和，1+2+3+4+5。我们可以用按阶梯形式排列的点表示这个和：



$$1+2+3+4+5$$

为了求这些点的数量，让我们把缺失部分填满，得到一个矩形：



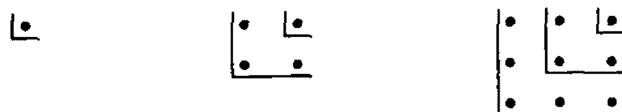
$$1+2+3+4+5=(5\times 6)/2=15$$

这个矩形有 $5\times 6=30$ 个点。因为这是黑点数量的两倍，所以要求的和是 30 的一半，即 15。扩展到求前 n 个整数的和，我们得到公式 $1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2$。[4]

更有趣的模式是前 n 个奇整数的和，$1+3+5+\cdots+(2n-1)$。我们注意到 $1^2=1$，$1+3=4=2^2$，$1+3+5=9=3^2$，以此类推。无论我们加多少个奇

数，它们的和总是一个数的完全平方：1+3+5+…+（2n−1）＝n^2。

下面的点模式很清楚地表示这一结果：



$$1=1^2=1 \qquad 1+3=2^2=4 \qquad 1+3+5=3^2=9$$

这样的探索研究致使毕达哥拉斯信徒发明了一种以各种图形的相互关联为基础的原始代数。例如，我们熟悉的公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$可以用几何方法证明，考虑如图 2-5 所示的边为$(a+b)$的正方形。我们可以把这个正方形分割成面积分别是 a^2 和 b^2 的 2 个小正方形，以及面积分别是 $a\times b$ 和 $b\times a$ 的 2 个矩形。这 2 个矩形是全等的，因此它们的面积也相等。所以，分割部分的总面积是 $a^2+2ab+b^2$，而这个面积等于原来正方形的面积$(a+b)^2$。其他公式，如$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 或$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 都可以用类似的方式证明。这类几何代数是我们现代符号代数的先驱。[5]

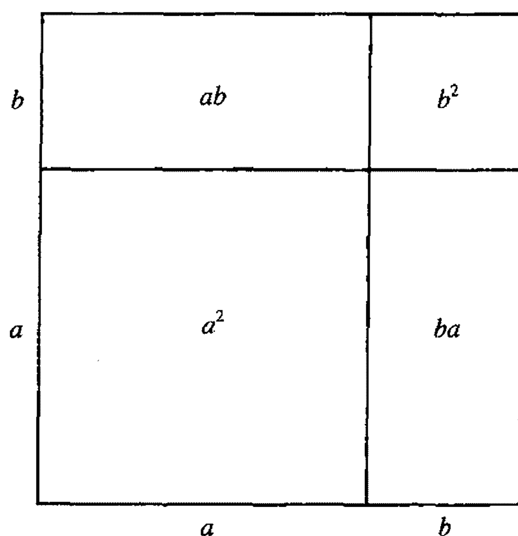


图 2-5　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$的几何证明



接下来说一下毕达哥拉斯三元组。如第 1 章所述，它们是满足 $a^2+b^2=c^2$ 的正整数（a, b, c）。这一著名定理的发现人用学派主人的名字来命名它，他们天生就热衷于寻找 3 个边都是整数的直角三角形，但不久就意识到说比做容易：你可以任取两条整数长度的边，但是第 3 条边就很有可能不是整数。如果偶然发现了毕达哥拉斯三角形，这些人就会异常高兴。传说是这样描述的：他们为了庆祝这些重要事件而举办盛会，在盛会上杀了一百头牛作为祭品。[6]

至于毕达哥拉斯信徒又是如何发现这些三角形的，我们没有直接的证据。据一种理论说，他们使用了下面这个公式：

$$n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

表明对于每一个奇数 n，$n(n^2-1)/2$ 和$(n^2+1)/2$ 形成一个毕达哥拉斯三元组（实际就是素三元组，参看第 1 章）。例如，当 $n=3$ 时，我们得到三元组（3,4,5）；而 $n=5$ 时，三元组是（5,12,13），等等。

当然，利用现代代数很容易证明等式(1)，但是这不是希腊人的做法。最有可能的是他们是通过下面的观察用几何方法证明的。想象一个排列成 m 行 m 列的 m^2 个点的矩阵。在这个矩阵的外围，额外放置 $2m+1$ 个点（m 个点沿着两条邻边，一个点放在角上），于是产生一个有 $(m+1)^2$ 个点的扩大正方形。例如，如果 $m=4$，那么 $2m+1=9$，于是从一个有 $4^2=16$ 个点的矩阵变成一个有 $5^2=25$ 个点的新矩阵：

○ ○ ○ ○ ○
○ ● ● ● ●
○ ● ● ● ●
○ ● ● ● ●
○ ● ● ● ●

因此，我们得到公式

$$m^2+(2m+1)=(m+1)^2 \tag{2}$$

这个公式是我们在初等代数中所熟识的公式。现在，假设 $2m+1$ 是一个完全平方数，比如说等于 n^2。那么等式(2)变成 $m^2+n^2=(m+1)^2$，于是产生毕达哥拉斯三元组$(m,n,m+1)$。求解 $2m+1=n^2$ 这个等式，我们得到 $m=(n^2-1)/2$，所以等式(2)变成

$$\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2+n^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

这就是等式(1)。[7]



尽管这些发现很重要，但是它们与深刻影响数学发展进程的两件事相比略显逊色：毕达哥拉斯给出的定理的证明，以及不能表示成两个整数比的新类型的数的发现，这种新类型的数就是无理数。无论是这个定理的证明还是无理数的发现的具体细节都没有保留下来，所以我们所能做的就是凭借后来人的作品和我们的推测。[8]

欧几里得在大约公元前 300 年完成了他的《几何原本》，书中他给出了毕达哥拉斯定理的两个证明：一个是卷 I 的命题 47，这一证明完全依赖于面积关系，相当地复杂；另一个是卷 VI 的命题 31，这一证明以比例的概念为基础，相当简单（我们将在第 3 章讨论这两个证明）。这是毕达哥拉斯自己的证明吗？几乎可以肯定的是，毕达哥拉斯不会使用 I-47。在他那个时代，几何还没有太大的进步。他可能使用 VI-31，但是如果是那样的话，他的证明就不完美，因为比例的完整概念是由欧多克斯发明的，而欧多克斯比毕达哥拉斯所生活的年代晚大约 2 个世纪。

另一方面，有理由相信毕达哥拉斯首先证明了直角等边三角形的特殊情况，即 45°-45°-90°直角三角形。印度人早已知道这一证明，那么毕达哥拉斯在地中海旅行期间也一定听说过这一证明。这一证明相当简单：在正方形 *ABCD*（图 2-6）中，连接相邻两边和对边的中点。内部的正方形 *KLMN* 被分割成 4 个全等的等边直角三角形。这 4 个三角形中的任意 2 个的面积和等于以三角形 *MNC* 的边 *MC* 或 *NC* 为边构建的正方形面积，所以正方形 *KLMN* 的总面积等于以这两条边为边构建的正方形的面积的和。

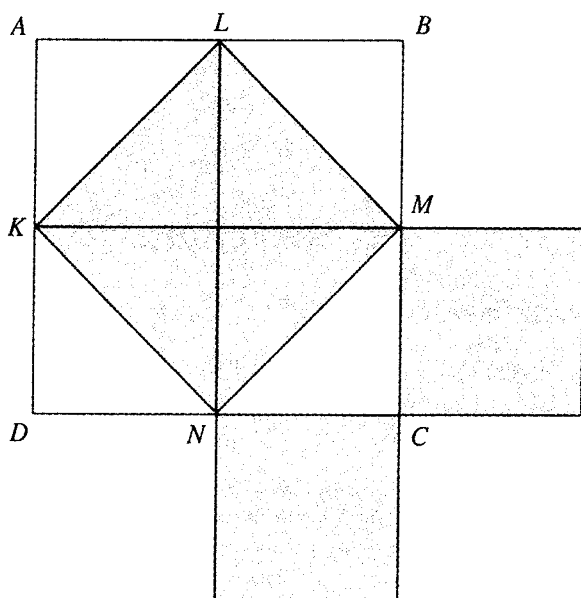


图 2-6　毕达哥拉斯定理的特殊情况：45°-45°-90°三角形

毕达哥拉斯也是这样证明一般情况的吗？我们没有直接证据，但是很难相信在有了这个特殊情况的证明示范后，他不去进一步建立一般定理。人们依照惯例把一个中国人早已知道的证明归功于他。把图 2-6 中的内部的正方形从它现在处于的 45° 角位置倾斜一下，我们得到图 2-7a 的图。此时正方形 *ABCD* 被分割成内部一个正方形 *KLMN* 和 4 个全等

的直角三角形（图中的阴影部分）。如图 2-7b 那样重新组合这些直角三角形，我们看到剩余面积（无阴影部分）是正方形 1 和 2 的面积和，即以这些直角三角形中每个边为边构建的正方形。

我们将在第 5 章再次看到“中国证明”。毕达哥拉斯是否使用了这个证明，现在我们无法得知。[9]无论如何，这一证明预示着我们对数学的思考方式发生了根本的变化：你必须利用符合逻辑的论据来证明它。这种变化标志着数学从古希腊的经验主义到今天数学成为演绎学科目的转变。

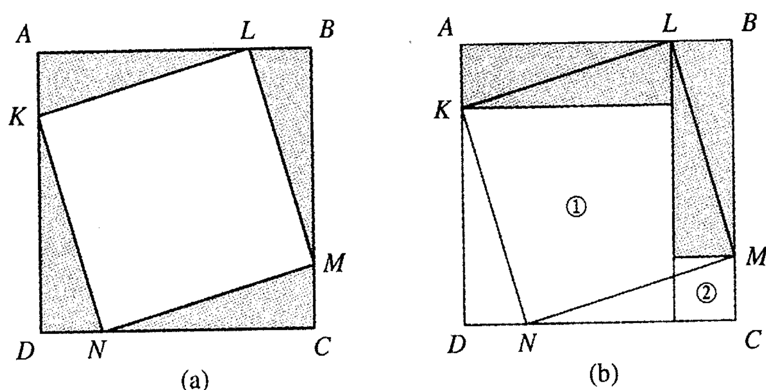


图 2-7　“中国人的证明”



45°-45°-90°三角形很自然促使毕达哥拉斯学派注意到这样的问题：给定一个单位边长的正方形，求它的对角线长度（图 2-8）。设这个长度是 d，使用毕达哥拉斯定理，我们得到 $d^2=1^2+1^2=2$，所以 $d=\sqrt{2}$（用现代记法）。但是 $\sqrt{2}$ 是一种什么样的数呢？使用直尺和圆规（图 2-9），一种简单的几何构造表示 $\sqrt{2}$ 的值在 1 和 2 之间，所以它一定是一个分数。但是无论毕达哥拉斯信徒怎样努力去证明这个数是有理数，他们都没有成功：很多有理数都跟它接近，但是没有一个真正等于 $\sqrt{2}$。因此

有了无理数（irrational）的名字，意思是（在数学的意义下）“不是有理”。然而，注意这个词的双重含义：它还意味着“不可理喻”，这就是希腊人发现 $\sqrt{2}$ 不是整数比时候的真实感受。

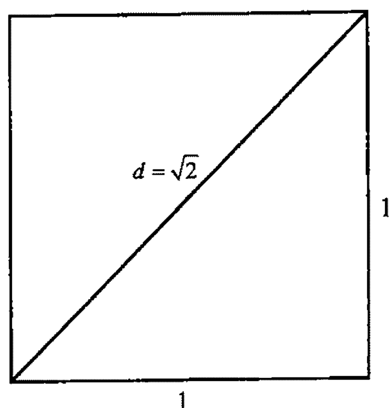


图 2-8　正方形的对角线

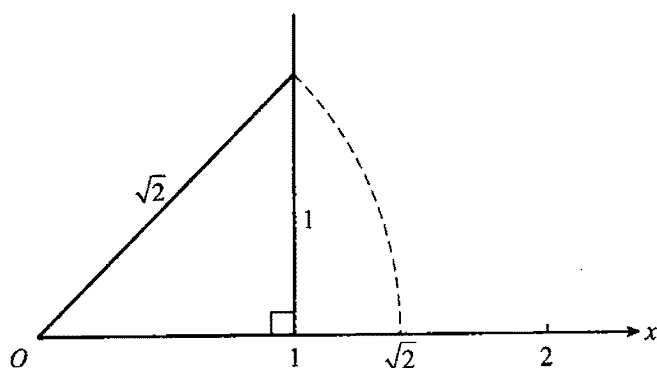


图 2-9　在数轴上构建 $\sqrt{2}$

如同毕达哥拉斯的其他发现一样，这一发现的具体细节充满神秘色彩。我们不知道这个定理是毕达哥拉斯本人发现的，还是他的一个本应获得荣誉的信徒之作，也不知道使用了什么样的证明（附录 D 给出一个证明）。无论怎样，这一发现使得这些东西都变得更加令人困惑，因为这是一个几何量，一个正方形对角线的长度，这个长度无法用两个整数的比表示。这一发现立即粉碎了他们所信仰的有理数至高无尚的信

念，同时它也带来了意义深远的反响。因为不知道如何处理这种新的量值，所以毕达哥拉斯干脆拒绝把它考虑成为数，而认为正方形对角线是一个数不清的量。因此，几何和算术之间出现了裂痕，而且进一步扩展成为几何和代数之间的裂痕。这一裂痕持续了 2000 多年，成为数学进一步发展的障碍。直到 17 世纪笛卡儿解析几何建立，才最终圆满地弥补了这一裂痕。

据传说，这些毕达哥拉斯信徒对 $\sqrt{2}$ 是无理数的发现感到非常震惊，以至于他们发誓一定严守这个秘密，也许是因为害怕它给平民带来不利的影响。但是，他们中间有一个名叫依柏索的人决心把这一发现公布于天下。他的同伴们因他对忠诚的背叛而非常愤怒，因此把他从船上扔了出去，从此他就沉睡于地中海的海底了。



毕达哥拉斯的遗风持续了2000多年，在某种程度上甚至持续到今天。毕达哥拉斯对数的象征意义及数的神秘性的迷恋影响了无数的作家、艺术家和思想家。毕达哥拉斯首先发现的数学和音乐之间的关系在欧洲文艺复兴时期产生反响，在欧洲，教堂就是根据音乐比例2：1，3：2，4：3来设计的。1617年出版的一本书中的插图（图2-10）展示了上帝的手正在调试一只巨大的单弦琴，一根弦沿着一个共鸣板被拉伸，而在这块共鸣板上，一组行星轨道在各音阶间穿行。短语“天体音乐”变成了文艺复兴时期科学家的一种灵感。最后一位毕达哥拉斯信徒是天文学家开普勒（1570—1631），他一度被推崇为最顶尖级的科学家和顽固的神秘主义者，开普勒花费了他生命中的30年时间试图用音乐和谐性去发现行星运行规律，这可以说是一种浪费。开普勒相信每一个行星根据它与太阳的距离而在弹奏一个曲调，行星距离太阳越近，音调就越高

（图2-11）。但是，正是开普勒放弃了希腊的圆形轨道，采用椭圆轨道，从而把天文学推向现代进程。

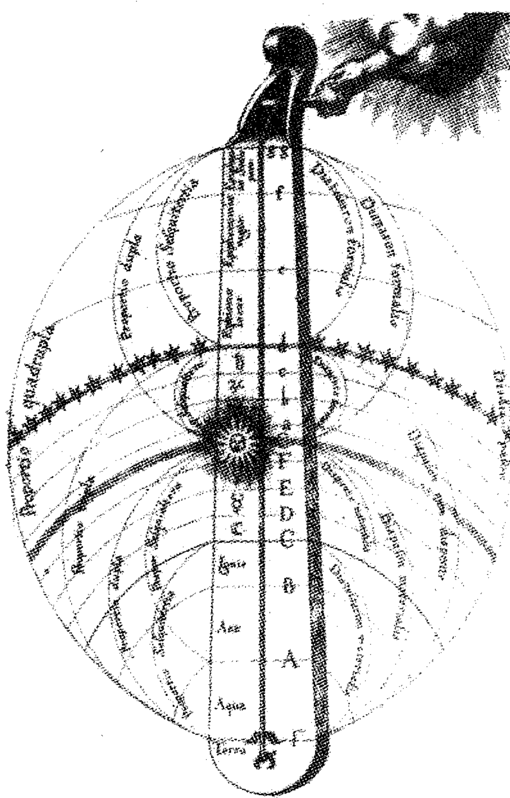


图 2-10　调试宇宙单弦琴的上帝之手



图 2-11　开普勒的《世界的和谐》（1619）中的“行星的和谐曲”

时至今日，毕达哥拉斯哲学的幽灵还在苟延残喘。由于爱因斯坦的广义相对论的公式异常简洁，使得简单对称在自然法则中起着重要作用的思想重获土壤。物理学家狄拉克（1902—1984）在他的著名格言中定

下这样的基调："使一个方程更漂亮比它符合实验观测结论更重要。"[10]现在，很多理论家把其毕生的精力投入到一门名为弦论的深奥课题之中，这一理论声称用十一维空间内的弦振动可以解释宇宙间的所有事物，从宇宙大爆炸到亚原子粒子的内部状况。琴弦在振动？毕达哥拉斯如果活着一定会欣喜若狂。

注释和参考文献

[1] 本章中所给出的毕达哥拉斯的生活细节主要是依据史密斯的著作。特别是参考卷1, pp.69-77 和卷 2, pp.288-290。

[2] 我们关于毕达哥拉斯的工作的主要信息来源于普罗克鲁斯的《欧德莫斯概要》(*Eudemian Summary*)，这本著作包含了对《几何原本》卷 I 的注释，和一直到欧几里得时代关于希腊几何的历史概括；其摘要是根据亚里士多德的一个学生欧德莫斯（约公元前 335 年）的早前著作片段写成的。尽管普罗克鲁斯（412—485）生活的时代比毕达哥拉斯晚 1000 年，但是他能够接触到他祖先的原始文献。

[3] 到 2005 年为止，最大的完全数是 $2^{25\,964\,950}\times(2^{25\,964\,951}-1)$，这是一个有 15 632 458 位的怪物，它是一位德国眼科医生 Martin Nowak 使用了 2.4 GHz Pentium 4 计算机计算了 50 天后发现的。在公元前 3 世纪，欧几里得证明了如果 2^n-1 是素数，那么 $2^{n-1}(2^n-1)$就是一个完全数（而且必须是一个偶数）。大约两千年后的 1770 年，欧拉证明了每一个偶数完全数都是形如 $2^{n-1}(2^n-1)$的数。尽管在理论上没有排除奇数成为完全数，但是至今仍没有寻找到一个奇数完全数。

当 n 是质数时，形如 2^n-1 的质数被称为梅森素数，这是以法国修道士兼业余数学家梅森（1588—1648）的名字命名的。上面提到的欧几里得和欧拉理论都说，每一个梅森素数产生一个完全数，因此它们的历史是密切相关的。能够生成梅森素数的前 4 个整数 n 是 2、3、5 和 7，分别生成素数 3、7、31 和 127。并不是每一个素数 n 都能生成梅森素数，例如，n=11 时，我们得到 $2^{11}-1=2\,047=23\times89$，这是一个合数。因此，为使 2^n-1 成为素数，n 是素数的条件是必要的，但不是充分的。

[4] 由于点模式的三角形形状，前 n 个整数的和被称为三角形数。前 10 个

三角形数是 1，3，6，10，15，21，28，36，45 和 55。

今天，我们把这个和看成是算术级数的特殊情况，所谓的算术级数就是每一个数都可以由它前一项加上一个固定的数而得到，这里这个固定的数就是 1。有一个关于伟大德国数学家高斯（1777—1855）的故事。当老师让 10 岁的高斯计算前 100 个整数的和时，让这位老师吃惊的是，高斯几乎立即站起来回答说这个和等于 5 050。高斯解释说，他只是把这个要求的和写成了两次，分别是 1+2+3+…+98+99+100 和 100+99+98+…+3+2+1，然后把这两个和垂直的对应项加起来。每一对加起来等于 101，一共有 100 对。于是两行数的和等于 100×101=10 100。要求的和等于这个数的一半，即等于 5 050。

关于象形数的更多内容可以参见伊夫斯的著作，pp.78-80 和 94。

[5] 然而，我们应该指出的是希腊人不认为量 a 和 b 是变量，而认为它们是由线段表示的一个固定的几何数量。变量的概念对他们来说是外来品，这就阻碍了他们把几何代数转化成几个世纪后出现的强大工具，符号代数。

[6] 然而，这一记事令人怀疑：受到他们的行为修道法则的束缚，毕达哥拉斯学派憎恨屠杀动物。德国 19 世纪有一首诗说，这个故事对某个养牛的村落产生了很大刺激，从那一刻起他们就对新的数学发现产生了恐惧（参见补充 2）。

[7] 关于毕达哥拉斯三元组的更多相关内容，可以参考附录 B，也可以参看伊夫斯的著作，pp.81-82 和 97-98。

[8] 很多学术争论都是关于毕达哥拉斯学派是如何证明这个定理的，但是都没有争论出结果来。参见希思爵士翻译的欧儿里得的《几何原本》（Dover, 1956），卷 1, pp.350-356。

[9] 这可以从两名公认顶尖级数学历史学家的完全相反的观点略见一斑，这两位是伊夫斯和希思。伊夫斯说，“一般认为它[毕达哥拉斯的证明]可能是割补式证明”（伊夫斯，p.81），而希思则持完全相反的观点，他说“很难支持毕达哥拉斯使用了这种方式的一般证明方法[割补式]……；它没有明显的希腊色彩，却叫人想起印度人的方法”（希思, *Euclid*, 卷 1, p.355）。然而，希思不排除毕达哥拉斯对有理数边的三角形情况[例如，（3, 4, 5）这样的三角形]使用了割补方法的可能性。

[10] 引自于他的文章，“物理学家的自然画卷之演变”，《科学美国》，1963 年 5 月。

第3章 欧几里得的《几何原本》

> 没有哪个几何定理能够像毕达哥拉斯定理的简单二次公式那样，对其他数学分支产生如此多的影响。的确，古典数学和现代数学的大部分历史都是围绕着这个定理而写成的。
>
> ——托比亚斯 · 丹奇科，《希腊人的遗产》，p.95

毕达哥拉斯学园一成立就获得了至高无尚的贵族俱乐部的荣誉，今天我们可能说这是一个优秀人才的集团，而不久之后它的成员们就招来了其他公民的愤怒。他们受到骚扰，他们的会议地点被破坏，而且毕达哥拉斯本人也因遭到追杀被迫逃亡。（他的后半生也是如此，而其死亡细节不得而知。也有传言说他活到了近 80 岁。）这还远没有结束，毕达哥拉斯学派的这种不安定的局面才刚刚开始。

与此同时，巨大的政治变革正在重塑着这个古老的世界。波斯帝国不断强大，不久取代了巴比伦在地中海的统治地位。公元前 546 年，波斯占领了爱奥尼亚的城池以及他们在小亚细亚的殖民地。公元前 499 年，雅典领导了一场未成功的反抗波斯的革命。为了复仇，国王大流士派出一支庞大的舰队去攻占希腊大陆，但是他的舰队遭到了暴风雨的袭击。公元前 490 年，雅典人在马拉松打败了波斯人，维护了他们在希腊其他城邦的统治地位。

接着是将近半个世纪的和平，其间雅典不断发展繁荣，成为民主和

学术的中心。四分五裂的毕达哥拉斯学派在这里找到了避难所，像伯里克利、苏格拉底、安纳萨哥拉斯、齐诺以及帕曼尼迪思这些伟大的思想家们都把雅典当作他们自己的家园。但是，伯罗奔尼撒战争（公元前 431—前 404）结束了这一切。在战争期间，雅典在军事上遭到斯巴达打击的同时，又遭受到瘟疫的侵袭。而到了公元前 371 年，斯巴达自己也在多次城邦战争中被打败。学术中心转移到了特伦顿（现在的意大利），在那里，毕达哥拉斯学派重新处于阿契塔的领导之下。

但是，雅典又慢慢夺回了它的领导角色。希腊最辉煌的年代开始于公元前 387 年，当时伟大的哲学家柏拉图（约公元前 427—前 347）建立了雅典学园。这所学园统治了希腊文化生活将近千年。柏拉图自己虽然不是一名数学家，但是，他对数学的重要贡献是他认识到掌握逻辑思想的重要性，以及最终建立良性健全的民主的重要性（即使对今天来说这都是多么地正确！）。雕刻在这所校园门口的座右铭是："不精通几何者不得入内。"这成为了一句不朽的名言。

第二次大的政治剧变发生在公元前 338 年，当时由国王菲利普领导的军事战役之后，马其顿国吞并了希腊。两年后，菲利普的儿子亚历山大大帝（公元前 356—前 323）登上了王位，并在十年内扩张了希腊帝国的领土，东起印度西至直布罗陀海峡，几乎包围了整个古老世界。

公元前 332 年，亚历山大在埃及尼罗河三角洲的最西边建立了一座新城市，并以他自己的名字为其命名。不久，这座城市成为希腊帝国的经济和文化的中心。到了公元前 300 年，它的人口增长到了 50 万，拥有他们引以自豪的古代世界最宏伟的建筑。它的海港入口处挺立着一个宏伟的灯塔，有 91 米高，人们可以从 110 公里远的地方看到它的火光，这是古代七大奇迹之一。

但是，仅仅 9 年之后，历史的进程再一次发生了变化。公元前 323

年，亚历山大在他33岁时英年早逝。希腊帝国在各政治对手的分争下四分五裂，然而它们仍以亚历山大的文化遗产为纽带联系在一起。埃及开始进入托勒密王朝的统治。托勒密一世于公元前306年开始他的统治，并以亚历山大城作为他的首都，在那里建立了一所学校，这所学校后来成为古代世界的一颗璀璨的明珠。这所学校具备现代大学校园的所有特征：宏伟的建筑、花园、宿舍和博物馆。它名声显赫的图书馆有超过50万册的藏书（都以纸草书卷轴的形式），只要是能够找到的，无论这些书在哪里都被拿来，有时候是非法甚至是强制的。学者们为了进行深入研究从远近不同地方络绎不绝地来到亚历山大城。希腊要感谢这些学者们，是他们使希腊文化成为古代世界的统治文化，使它的语言成为那个时代的通用语言。[1]



就是在这样的背景之下，欧几里得登场了。与毕达哥拉斯一样，我们对欧几里得的生平几乎一无所知，甚至不知道他准确的出生年月和地点，但是，他很有可能出生在雅典，并在那里接受教育。随后，他定居于亚历山大城，成为亚历山大大学的数学带头人（据某些记载说，他是这所大学图书馆的馆长）。他在回答托勒密关于学习这门科学是否有捷径的问题时的著名妙语“几何无王道”似乎是他人之作。还有一个故事，说的是当一名学生想要知道学习几何有什么好处时，欧几里得给这名学生一个便士，然后回答说“因为他必须用他学到的东西赚钱”。

欧几里得写了几本数学和光学的书籍，其中有一些经由阿拉伯人的翻译而保存了下来。但是，他最具影响力的著作是《几何原本》。这一著作分为十三“卷”（也就是我们今天所说的“部”），是他所处时代数学论述的汇总。定义、公理、定理和证明的这种简洁、严谨的风格直至今日

一直是数学文章的典范。十三卷共有 465 个定理，涵盖了几何、数论和初等代数等相关内容（这里的“初等”的含义是，代数公式是用几何方式而不是通过符号方式得到的）。但是，我们不知道这些定理中是否有以及哪些是欧几里得本人发现的。他自己所承担的角色是一个宏大计划的主编人，这个计划就是把自毕达哥拉斯以来发展起来的数学聚集成一个符合逻辑的巨大的数学体系。就这样，他把自己的成果（如果有的话）也毫无保留地贡献了出来。

把《几何原本》与现代数学课本作比较是非常有启发意义的。在这本书中你不会找到一般性的前言和介绍，以及给学生的序和教师的序，附有答案的练习、附录、参考书目和索引。你也找不到说这本书优于其他相关书目的赞美之词。从它的第一页，确切地说从第一句话开始，它就直接切入正题。正是这种严谨风格和严格的逻辑论证使这本书吸引了很多伟大的思想家：笛卡儿、牛顿以及其他科学家大多是在他们年轻的时候通过研究欧几里得而进入到数学殿堂的。

显然，没有任何一本书像《几何原本》那样对数学产生了如此巨大的影响。这一著作被翻译成各种文字，重新发行了无数个版本（有人说，它的版本之多，仅次于圣经，名列第二）。另外，几乎没有哪本书有如此大量的人去编写注释，以及这些注释的注释。这本书的一个现代版本可能对原著的每一页都有二十几页的注释。《几何原本》这种简明平实的风格堪比公元 4 世纪编写的《犹太法典》。

《几何原本》的开篇给出 23 个基本概念，例如点（不可分割的整体）、线（没有宽度但有长度）、直线（由点组成的平坦的线）以及平面角（同一平面内不在同一条直线上的两条相交直线的交角）。[2] 这之后是 10 个陈述，欧几里得认为这 10 个陈述是自明的，清楚明了没有疑问，因此无需证明。今天，我们把这些陈述称为公理，并把它们分成两组：第一组

的 5 个公理是研究几何概念的，即书中所谓的“公设”；其余的 5 个公理是研究算术的，即书中所谓的“公理”[①]。我们把它们一一列举出来。

公设

1. 过任意两点可作一条直线。
2. 直线可向两端无限延伸。
3. 以任意一点为圆心及任意距离为半径可作一个圆。
4. 所有的直角均相等。
5. 一条直线与另两条直线相交，若同一侧的内角和小于两个直角，则将这两条直线无限延伸，则它们在小于两个直角的一侧相交。

公理

1. 与同一个量相等的所有量彼此相等。
2. 等量加另一等量，和相等。
3. 等量减另一等量，差相等。
4. 彼此能够重合的物体彼此全等。
5. 整体大于部分。

在接下来的 2000 年里，这 10 条公理和欧几里得从它们推导出来的 465 个定理的知识体系被尊为绝对的真理、神圣的典据而传递下来。事实上，有时候这 10 条公理被称为几何的十大戒律。更有甚者，以它们为基础的欧几里得几何被认为是唯一的几何。直到 18 世纪，人们才开始质疑这 10 条公理的绝对合理性，特别是对第 5 条基本公理，即所称的“平行公设”开始产生质疑。但是，数学家们花了大约 100 年才认识到欧几里得几何只是

① 也译做“公论”。——译者注

众多可能几何中的一个。这一认识非常重要，从核心上撼动了数学。我们将在第 12 章讲述这一故事。



10 条公理之后，紧接着就是前 48 个定理，其间没有一句多余的话，欧几里得称它们为“命题”，这些组成了《几何原本》第一卷：在给定三角形的一条边的条件下，如何构造一个等边三角形。这之后就是利用圆规直尺的基本几何作图法，今天每个孩子在中学学习的就是这种作图法：如何复制一条线段（也就是说，在这个平面内如何把一条线段移到一个新位置上去），如何从直线外一点作这直线的垂线，如何平分一个角，等等。在本卷，我们还可以看到我们熟悉的三个全等定理（*SAS*、*SSA* 和 *SSS*，其中 *S* 代表边，*A* 表示角），以及三角形内角和等于两个直角的定理（这里没有提到 180°）。接着，在第一卷的末尾是下面的定理。

命题 47　在直角三角形中，直角的对边上的正方形等于包含这个直角的两条边上的正方形。

也就是说，斜边上的正方形等于其他两条边上的正方形之和：这就是毕达哥拉斯定理。《几何原本》中任何地方都没有出现与特殊定理相关的人名，毕达哥拉斯的名字也不例外。

在证明这个定理之前，欧几里得需要一个预备定理，这就是下面这个命题。

命题 38　有相等的底且在相同平行线内的三角形相等。

也就是说，有相同的底且有一个顶点位于平行于这个底的一条平行线上的三角形有相同的面积。

证明　在图 3-1 中，设三角形 *ABC* 和 *DEF* 有相等的底 *BC*

和 EF（在这个图中，把这两个底画在同一条直线上）。顶点 A 和 D 在平行于 BC 和 EF 的平行线上。我们延长 AD 到点 G 和点 H，其中，GB 平行于 AC，HF 平行于 DE。于是，图 $GBCA$ 和图 $DEFH$ 是有相同面积的平行四边形，因为它们有相等的底 BC 和 EF，而且位于相同的两条平行线 BF 和 GH 之间。此时，三角形 ABC 的面积是平形四边形 $GBCA$ 面积的一半，而三角形 DEF 的面积是平行四边形 $DEFH$ 的面积的一半，因此这两个三角形有相同的面积。*QED*。[3]

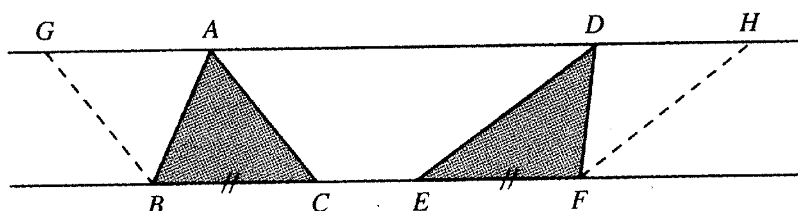


图 3-1　命题 I-38：三角形 ABC 和 DEF 有相同的面积

（现代的证明只是简单地利用三角形面积公式，面积 =(底×高)/2 即可，其证明如下：设底 BC 的定长为 a，设顶点 A 在平行于 BC 的直线上移动。无论顶点 A 在这条线上的位置如何，它到 BC 的垂直距离是一个常数，比如说是 h。于是，满足条件的每一个三角形的面积是 $ah/2$ = 常数。）

到此，欧几里得已经准备好去证明这个重要的定理。第一步，他证明了一个引理（一个预备结果）：在直角三角形中，一条边上的正方形的面积等于斜边和这条边在斜边上的垂直投影形成的矩形的面积。

为了弄清楚其意义，我们来看图 3-2。设直角三角形为 ABC，角 C 是直角。在边 AC 上构建一个正方形 $ACHG$，因此，角 $\angle ACH$ 是一个直角。但是，$\angle ACB$ 也是一个直角，且与 $\angle ACH$ 有同一条边 AC。因此，$\angle HCB = \angle HCA + \angle ACB =$ 两个直角，因此，HC 是 BC 的延长线。设

AC 在斜边上的投影是 AD。构造 AF 等于 AB 且垂直于 AB，考虑三角形 BAG 和 FAC（图中的两个阴影部分）。我们有 $AF = AB$，$AC = AG$。另外，$\angle BAG = \angle FAC$，因为每一个三角形都由一个直角和一个公共角 $\angle BAC$ 组成。所以，$\triangle BAG$ 和 $\triangle FAC$ 全等（SAS 的情况），因此二者有相同的面积。但是，由引理可知，$\triangle BAG$ 的面积等于 $\triangle CAG$（其中 CG 是正方形 $ACHG$ 的对角线），因为顶点 B 和顶点 C 位于底 AG 的平行线上。类似地，$\triangle FAC$ 的面积等于 $\triangle FAD$（其中 FD 是矩形 $AFED$ 的对角线）。但是 $\triangle CAG$ 的面积等于正方形 $ACHG$ 的面积的一半，$\triangle FAD$ 的面积等于矩形 $AFED$ 的面积的一半。综合上述，最后我们得到结果

$$\text{面积 } ACHG = \text{ 面积 } AFED$$

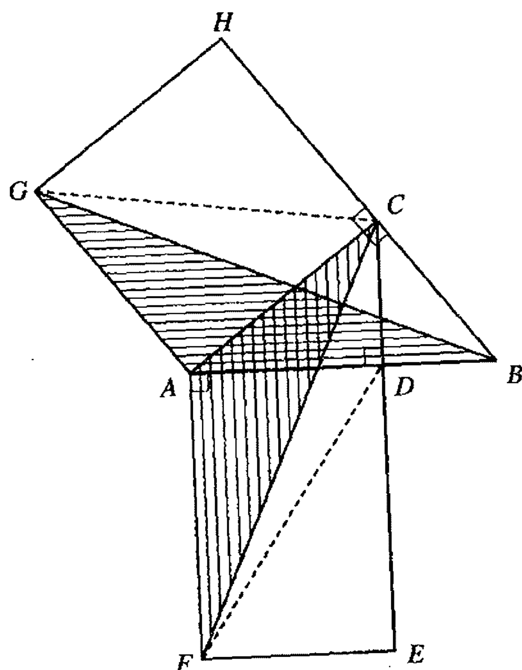


图 3-2　命题 I-47 的证明中的引理

现在（如果你坚持到了这里），我们几乎可以得到证明了。对于直角三角形的另一条边引理也同样是正确的。参考图 3-3，我们得到

$$\text{面积 } ACHG = \text{ 面积 } AFED$$

$$\text{面积 } BCNM = \text{ 面积 } BKED$$

把这两个等式加起来，我们得到

$$\text{面积 } ACHG + \text{ 面积 } BCNM = \text{ 面积 } AFKB$$

这就是毕达哥拉斯定理。证毕（QED）。[4]

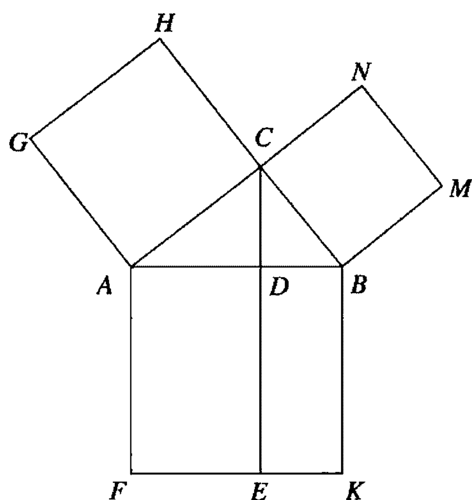


图 3-3　命题 I-47 的证明

对于刚刚开始学习几何的学生来说，这个定理的证明肯定是他们遇到的最难的证明之一。但是，正是这个证明，一代又一代的学生们与之不懈地抗争，包括该书的作者（图 3-4）。据说，哲学家阿瑟 · 叔本华曾经坚称这一证明不是在引导学生，而是轻易地将其击倒："画出这些线，我们不知道是为了什么，然后它们就像是突然收口的罗网一样，出其不意地把这些吃惊的读者全都俘虏了。" [5]



因此，自然就产生这样一个问题，在当时有很多更加简单的证明的

情况下，欧几里得为什么要选择这样一个证明呢？这里有两个可能的答案。第一，大多数其他证明方法都要需要把一个直角三形分割成更小的相似三角形，然后利用比例法则得到等式 $a^2 + b^2 = c^2$。但是，比例法则是在《几何原本》的卷 V 中才给出，而相似法则到了卷 VI 才给出，因此，欧几里得在这个阶段是不能使用它们的，否则他就会掉入“循环论证”的圈子里，这是一个数学家可能犯的错误当中最坏的情况。



CA על היתר. על הנצב AC נבנה רבוע ACHG. הצלע CH היא המשך של BC. נעביר את CF ו BG. במשולשים CAF ו GAB

AF = AB　　AC = AG

כל אחת מהזויות CAF ו GAB מורכבת מהזוית CAB ומזוית ישרה, לכן הן שוות. המשולשים CAF GAB חופפים, איפוא, עפ"י משפט החפיפה הראשון[1]). נעביר את האלכסונים DF ו CG. המשולשים DAF ו CAF שוים בשטחם, מפני שיש להם צלע משותפת AF וקדקדיהם D ו C נמצאים על ישר המקביל לצלע הזאת. המשולשים CAG ו BAG שוים בשטחם, מפני שיש להם צלע משותפת AG וקדקדיהם C ו B נמצאים על ישר המקביל לצלע הזאת. לכן, המשולשים DAF ו CAG שוים בשטחם. המשולש הראשון הוא חצי המלבן DAFE והמשולש השני הוא חצי הרבוע CAGH; נמצא כי המלבן והרבוע שוים בשטחם.

ציור 128

§163. משפט. במשולש ישר־זוית, הרבוע הבנוי על היתר שוה בשטחו לסכום הרבועים הבנויים על הנצבים.

הוכחה. נתון משולש ABC [ציור 129] עם זוית ישרה C. נבנה רבוע על כל אחת מצלעותיו. נעביר את CE באופן שיהיה מאונך ל AB. המלבן ADEF שוה בשטחו לרבוע הבנוי על הנצב AC. המלבן BDEL שוה בשטחו לרבוע הבנוי על הנצב BC. לכן, הרבוע ABLF שוה בשטחו לסכום הרבועים הבנויים על הנצבים.

ציור 129

תוצאה. במשולש ישר־זוית, הרבוע הבנוי על אחד הנצבים שוה בשטחו להפרש שבין הרבועים הבנויים על היתר ועל הנצב השני.

אם נסמן ב c את היתר, ב a ו b — את הנצבים, יהיה:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad a^2 = c^2 - b^2$$

1) בכדי להפוך את המשולש GAB במשולש CAF, צריך לסבב את זה המשולש על הנקודה A בזוית של 90°.

图 3-4　我高中几何课本中的毕达哥拉斯定理

当然，欧几里得还可以选用“中国”证明（参见第2章），这个证明看起来显然比I-47简单。这个包括一个正方形的割补证明是一个“动态”证明，它基于这样的事实，平面图形作为一个刚性体在运动时，其面积

是不发生变化的。但是，这样依赖于物理世界的概念的范例，欧几里得对其应该说是恨之入骨的，因为他坚持每一个陈述的正确性只应建立在演绎推理的基础之上。这就从根本上排除了任何割补、拼凑类的证明方法。

我们来说明第二个原因。托比亚斯·丹奇格在他的经典著作《希腊人的遗产》一书中，主张欧几里得的证明“没有把毕达哥拉斯定理解释为直角三角形各边间的度量关系，而是把它解释为建立在这些边上的正方形的特性。对这一定理的这种字面上的解释把证明局限于面积等量关系上。”[6]我们还要记住的是，希腊人把所有算术运算都翻译成与几何相关的内容。数被看成是一条线段的长度；两个数的和被看成是端点相接的两条线段的总长度；两个数的积被看成是以相应线段为边的矩形的面积。作为特殊情况，一个数 a 的平方被解释成以 a 为边的正方形的面积（这就是为什么把量 a^2 称作为“a 的平方”的原因）。所以，对希腊人来说，他们很自然地把毕达哥拉斯定理解释成为面积关系，而且这是他们所能想象出的唯一方法。综上所述，欧几里得选择这样的证明方法是理所当然的。

然而，他应该意识到了这一证明给读者带来的困难，因为在卷 VI 中，欧几里得给出了第二种证明方法，这一证明是根据相似形证明的。命题 VI-31 说，

> 在直角三角形中，直角的对边上的图形等于包含直角的边上的相似及类似画出的图形。

这一命题几乎是把命题 I-47 一字不差地重述了一遍，只是用“图形”取代了“正方形”，用“相似及类似画出的图形”取代了“正方形”。在《几何原本》（图 3-5）中，这个定理的图示给出了 3 个相似矩形，但是“可

绘制图形”可以是任意类似构建的图形，它们甚至不必是多边形。在这种意义下，较之I-47，VI- 31是毕达哥拉斯定理的一个更一般的形式。欧几里得的证明概括如下。[7]

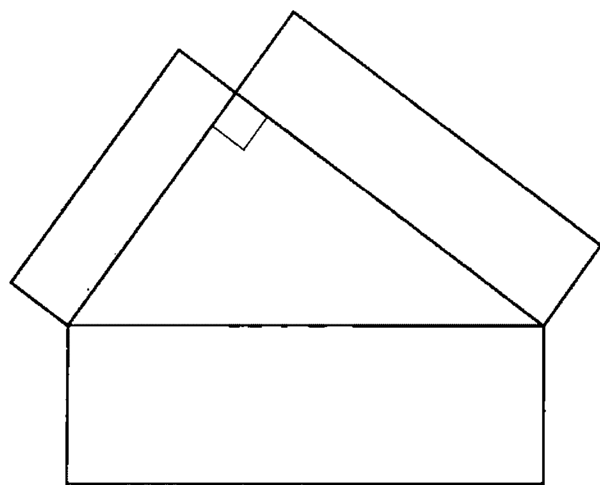


图3-5　欧几里得给出的命题VI-31的画法

在图3-6中，设直角三角形为ABC，C是直角。与I-47的证明相同，我们从点C作垂线CD垂直于斜边AB。因为$AB\perp CD$且$AC\perp CB$，所以我们有$\angle DAC=\angle DCB$。因此，三角形ADC和三角形CDB彼此相似，而且都与整个三角形ACB相似。[8]于是有$AB/AC=AC/AD$，$AB/BC=BC/BD$，由此通过交叉乘积，我们得到

$$AC^2=AB\times AD \text{ 和 } BC^2=AB\times BD$$

把这两个等式加起来，我们有

$$AC^2+BC^2=AB\times AD+AB\times BD=AB\times(AD+BD)$$

但是，$AD+BD=AB$，所以最后得到

$$AC^2+BC^2=AB\times AB=AB^2 \qquad \text{QED}$$

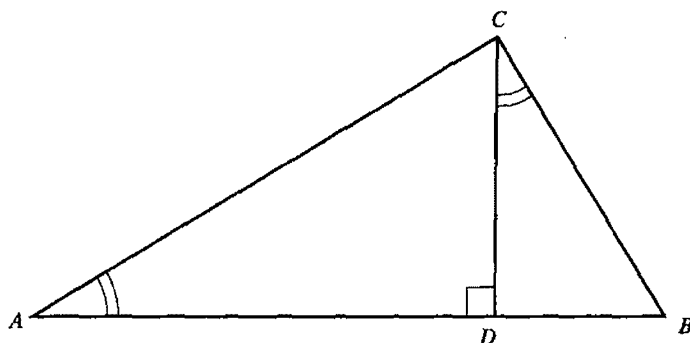


图 3-6　命题 VI-31 的证明

注释者普罗克鲁斯（约公元 412—485）的《欧德莫斯概要》是我们了解希腊数学的主要文献，他认为欧几里得是这一证明的原创者。根据普罗克鲁斯所述，这是《几何原本》中唯一由欧几里得本人给出的证明。[9]至少，这是现代学者所推崇的第二个证明。正如 17 世纪的一位作家说的那样，“对于这一证明我想了很多，但都不曾构想出除了比例法（即通过相似形）之外的其他方法的证明。”[10]

至于 I-47 的证明，普罗克鲁斯认为它是欧几里得的前辈欧多克斯（约公元前 408—前 355）证明的。欧多克斯是穷举法的发现者，两个世纪后，阿基米德使这一数学方法发挥了巨大作用；人们还认为他是欧几里得著作卷 V 的主题——比例理论的原创者。对于这一以毕达哥拉斯命名的定理，我们没有找到毕达哥拉斯原始证明的任何线索。考虑到在他所处的时代数学还处于相当初级的阶段，命题 I-47 或命题 VI-31 的证明归功于他几乎是不可能的（第 5 章将更多地讨论这一点）。同其他许多希腊早期数学界的状况一样，到底谁是这个数学中最著名的定理的第一证明人还不为人知。



I-47 是卷 I 的倒数第二个命题。最后一个编号为 48 的命题几乎不为

人知，在几何课本中也很少提到。

> 如果在一个三角形中，一条边上的正方形等于剩余两条边上的正方形，那么由这剩余两条边所构成的角是直角。

这是毕达哥拉斯定理的逆定理，本质上说的是直角三角形是使方程 $a^2+b^2=c^2$ 成立的唯一三角形。

这一命题的证明很简单，在这里我们给出它的现代证明过程。设三角形有边 a，b 和 c，且有 $c^2=a^2+b^2$。以等于 a 和 b 的边构造一个直角三角形，且设它的斜边是 d。根据 I-47，有 $d^2=a^2+b^2$。但是已知 $a^2+b^2=c^2$，所以 $d^2=c^2$，即在 c 和 d 上构建的正方形有相同的面积，因此是相等的。于是 $d=c$。于是，已知的三角形和刚才构造的三角形的三条边全相等，因此它们全等（*SSS* 全等情况）。又因为三角形（a,b,d）是直角三角形，所以三角（a,b,c）也是直角三角形，边 c 的对角是直角。证毕。[11]

至此，欧几里得结束了卷 I。尽管不曾提到毕达哥拉斯的名字，但是欧几里得也许觉得毕达哥拉斯定理应该是适合其著作卷 I 中的一个结论，含蓄地把颂词献给了这位大师。欧几里得在《几何原本》其余部分中经常使用这个定理。有关命题 I-47 和 VI-31 的证明在随后的时代增加到了上百个，今天所知一共有 400 多个证明。由于欧几里得，毕达哥拉斯定理开始传播开来。

注释和参考文献

[1] 希腊历史的这一简要概括来源于伊夫斯的著作，pp.105-108 和 140-141。对于亚历山大的更多的书籍，可以参见 Lionel Casson 著的 *Libraries in the Ancient World* (Yale University Press, 2001)，第 3 章。

[2] 这里的定义和公理来自希思的翻译本，该译本带有介绍和注释（共 3 卷；Dover, 1956）。

[3] QED 是拉丁语音 quod erat demonstrandum 的缩写，意思是“证明完毕”。在现代美国教科书中，这个词通常用小正方形代替。较老的书中通常使用符号∴。

[4] 伊夫斯的著作中（pp.155-156）提出可以把欧几里得的证明变成：“动态证明，……，其中斜边上的正方形可以连续地转变成这个直角三角形直角边上的正方形的和。”参见图 3-7。

[5] 如 J. L. Heilbron 在《几何文明：历史，文化和技术》(Oxford University Press, 1998)一书的 p.147 所述。而 Heilbron 则是引用自 Florian Cajori 的《普通教育中的数学》(Christopher, 1928)。

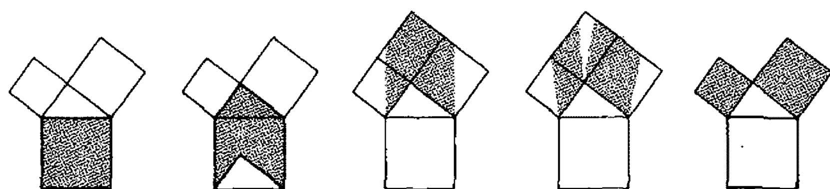


图 3-7 一个“动态证明”

[6]（Charles Scribner's Sons, 1955），p.97 引文中的斜体字是原本。

[7] 参阅希思的著作，卷 3，pp.269-270，它讨论了欧几里得可能遗漏的一些细节。

[8] 我们把 *ABC* 写成 *ACB* 的目的是为了保持相似关系中的正确的字母顺序；然而，这些线段本身是没有方向的，即 $AB = BA$，等等。

[9] 关于这一话题可以参阅丹奇科《希腊的遗产》，pp.97-99；希思，卷 2，pp.269-270。

[10] Heilbron，《几何文明》，p.147。

[11] 我们也许想把这个方程两边取平方根，并推断说因为 c 和 d 表示的是长度，因此它们都是正的，所以 $d = c$。但是，就像前面提到的那样，这一方法不是欧几里得启用的方法；他所遵循的是建立在面积关系之上的严格的几何方法。

补充2 艺术、诗和散文中的毕达哥拉斯定理

> 直角三角形斜边上的正方形……
>
> ——这是由萨尔·查普林谱曲，强尼·曼塞填词的音乐小调中的主题

毕达哥拉斯定理有很多名字：欧几里得 I-47，之所以有这个字名是因为在欧几里得《几何原本》卷I中它是第47个命题；风车（Windmill），这是因为毕达哥拉斯定理的特征图很像风车的三个帆；新娘的花轿，起这个名字的原因恐怕只有为它起这个名字的人才知道；[1] Dulcarnon（“有两个角”，这是修道士帽子的形状）；[2]或简单称之为直角三角形之斜边定理。文艺复兴时期的数学家卢卡·帕乔利（1445—1509）把毕达哥斯定理称为鹅的脚和孔雀的尾巴，[3]而中国人则把它叫做勾股定理。这些名字中最奇怪的名字也许是驴桥，也就是“驴的桥”。这个名字通常与另一个定理相关，这个定理是等边三角形中两个底角相等（欧几里得 I-5），法国人固执地认为它是毕达哥拉斯定理的特征图。[4]

《爱丽丝漫游奇境》(1865)和《镜中奇缘》(1871)的作者刘易斯·卡罗尔是一名最受喜爱的童话作家。但是却很少有人知道他也是一名数学家，他的真实名字是查尔斯·路德维希·道奇森。即使在他的数学著作中，他也不时展露出他的诙谐和幽默。下面是来自他的著作《平行线的新理论》中的一段话。

> （毕达哥拉斯定理）对几何真理的明了或魅力的影响不是30年，也不是3个世纪。例如，“直角三角形斜边上的正方形等于

其他两边上正方形的和"这样的定理今天仍就如毕达哥拉斯第一次发现它一样熠熠生辉，当时人们杀牛祭祀，庆祝它的诞生，这是对科学的尊重，对此我觉得这样的叙述略显夸张和多余。即使在这衰败的时代，你可以想象一下你自己做了某项具有时代意义的科学发现，于是邀请一两个朋友，带着牛排和葡萄酒一起庆祝。至于说杀牛祭祀？这样做恐怕会对牛肉供应造成不便。[5]

对于同样的话题，德国作家卡尔·路德维希·伯尼（1786—1837）发表意见说："毕达哥拉斯发现他的基本定理之后杀牛祭祀。从那时起，每当发现一个新事实时，所有劣等学生（在德语的俗语中，把笨蛋或傻子都称之为牛）都全身战栗。"[6]

德国诗人和植物学家阿德尔贝特·冯·沙米索（1781？—1838）就这一话题写了一首小歌谣，下面我把它翻译出来。

真理永存，
曾几何时一度麻木的世界突然明亮起来：
这个定理，一个附有毕达哥拉斯名字的定理，
它过去正确，今天依然正确。

毕达哥拉斯举行了豪华的祭祀，
祝福上帝给他带来神圣的光明。
熊熊的烈焰献祀上百头牛，
这位圣人表达谢意之后，宣布祭祀开始。

于是从那天开始，所有笨蛋
看到新真理出现，就如看到天空中的光芒，

他们在恐惧中惊慌失措。

毕达哥拉斯令他们充满恐惧，

由于过失他们无力避开阳光，

在极度绝望中，他们闭上眼睛哆嗦着[7]。

知名物理学家、生物学家、作家和电视评论员雅各布·布罗诺夫斯基（1908—1974）在《科学和人类的价值》中对此发表看法说："直至今天，毕达哥拉斯定理仍然是整个数学领域中最重要的定理，这样说似乎有些夸张，但这不过分，因为毕达哥拉斯所建起来的东西是我们存在的这个空间的基本特征，是第一次把这个特征转换成数……事实上，我们可以把组成直角三角形的这些数字作为我们发射到某个星系的信息提出来，来测试那里是否存在理性的生命。"[8]

美国物理学家诺贝尔获得者里恩·来德曼（1922—）把毕达哥拉斯描绘成"第一位宇宙人。正是这个人（而不是卡尔·萨根）杜撰了 Kosmos 一词来代表我们的宇宙中的一切，从人类到地球，再到头顶上旋转的星星。Kosmos 是一个不可翻译的希腊语，它代表秩序和美丽的诸多属性。他说，宇宙就是一个 Kosmos，一个有序的整体，我们人类的每一个人也是一个 Kosmos（还有其他更多的）。"[9]

下面这段话是现代天文学之父、毕达哥拉斯学派的最后一名支持者开普勒（1571—1630）说的："几何学有两个重要的珍宝：一个是毕达哥拉斯定理，另一个是一条线的终极分割和平均率。我们可以把第一个比作黄金，而把第二个比作珍珠。"[10]

在掌握了毕达哥拉斯定理的证明之后，有一位作家转向了几何学。这个人就是英国政治思想家托马斯·霍布斯。正如传记作家约翰·奥布

里在《简洁生活》中所说的那样。

> 他关注几何学时已经 40 岁了，是那样的偶然。在一个绅士的图书馆里，欧几里得《几何原本》打开着，展现的是毕达哥拉斯定理。他看了这个命题后说，（也许为了表示强调）上帝啊，这不可能！于是他阅读了它的证明，一个命题接着一命题看下去，最后他论证了这个定理是正确的。这就促使他爱上了几何。[11]



这个著名的定理还在艺术舞台上得到认可。在威廉·吉尔伯特和阿瑟·萨利文的电影《班战斯的海盗》中，那位将军告诉我们说：

> 我非常了解数学，而且掌握了它，
> 我懂得方程，一次方程和二次方程，
> 关于二项定理，我对它充满好奇，
> 斜边上的正方形有很令人振奋的事实。



到了 17 世纪，文艺复兴在其人文主义思想和宇宙学说领域达到了高峰。诗人、艺术家和哲学家都在因伽利略和牛顿的诸多发现而开启的新远景中狂欢。数学和科学不再是那些学者们独占的领地，它们走进人文艺术，在那里得到了滋养。艺术家们开始流行用各种带有某种寓意的几何体装饰他们的作品。法国艺术家劳伦特·德拉海尔（1606—1656）绘制了系列油画来推崇人文艺术——古代的四门学科，包括算术、几何、音乐和天文学，以及中世纪的三学科——文法学、修辞学和辩证法，这

三门学科是每一个受过教育的人都应该掌握的。在这个系列中，其中一个作品就是《几何的寓言》(1649)。在大画的左边，我们看到一个 104cm × 218cm 的油画立在画架上，这个画中画有几个点，暗示这是建筑师和工程师笛沙格（1593—1662）的透视作品。主画面的显眼布景是斜靠着的妇女展示着一张草稿，这个草稿上面可以看到几个几何图形。我们马上就可以认出左上方的图形：这就是毕达哥拉斯定理的证明图（参见第 3 章）。这个图形右边的图形是《几何原本》卷 II 的命题 9，而下面的图形是卷 III 的命题 36。[12]

有些国家一直以来都以邮票形式纪念毕达哥拉斯以及毕达哥拉斯定理，彩图 1 所展示的就是其中的几幅。

注释和参考文献

注释：碑文上引用的这首歌最初是由丹尼·凯演唱的，并在 1958 年的电影《戏班小丑》中上映。至于完整的的乐谱，可以参阅柯利夫顿·费迪曼著的 *The Mathematical Magpie*（西蒙与舒斯特，1962），pp.241-244。

[1] 史密斯的著作（卷 2, pp.289-290）对这个名字所作的解释是："也许是因为欧几里得的图像像是一个奴隶背回来的椅子，东部的新娘坐在这把椅子上被送往婚礼。"据史密斯的著作记载，传说中希腊人一直都使用类似的挑逗性的名字，"已婚妇女的定理"。

[2] Vera Sanford 著的《数学简史》(Houghton Mifflin, 1958)，p.272。

[3] 同上。

[4] Dan Pedoe 著的《几何与人文艺术》(St.Martin's Press, 1976)，p.153。法语是 pont aux anes. 参阅希思翻译的欧几里得《几何原本》，卷 1，pp.415-416（关于这个法文术语的出处）和 pp.417-418（关于毕达哥拉斯定理的其他流行名字）。

[5] Robert Edouard Moritz 著的《数学家和数学》(数学大事记)(Dover, 1942)，pp.307-308。

[6] 在 Moszkowski 著的 *Die unsterbliche Kiste* (1908) 中引用，来自于 Moritz 的《数学》，p.308。

[7]　《诗》(1835)是从德语翻译过来的；源自 Moritz 的《数学》, pp.308-309。

[8]　引用于迪克·特雷西的《失去的发现：现代科学的古代根基——从巴比伦到马雅》(Simon and Schuster, 2002), p.17。

[9]　《上帝粒子：如果宇宙是答案的话，那么问题是什么呢？》(与 Dick Teresi 合著, Houghton Mifflin, 1993), p.66。文中提到的 Carl Sagan 是关于 Sagan 的系列电视节目宇宙，它在 20 世纪 80 年代把天文学带进了百万观众的客厅。

[10]　如 Pedoe 在《几何》, p.72 中所引用的那样。"直线的终级分割和平均率"指的就是黄金分割，把线段分成大小两个部分，整个线段与大的部分的比和大的部分与小的部分的比有相同的比率。通常这个比例用希腊字母 Φ 表示，它等于 $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1.61803$，这就是我们知道的黄金比例，它的历史悠久，而且有很多有趣的性质；参阅 Mario Livio,《黄金分割：Φ 的故事，世界上最令人震惊的数》(Broadway Books, 2002)。

[11]　引用于 Stuart Hollingdale 著的《数学的制造者》(Penguin Books, 1991), p.39。

[12]　参阅 J.V.Field,《无限的发明》(Oxford University Press, 1997), pp.214-220。到了 1993 年的时候,《几何的寓言》才在某私人收藏中发现，它现在收藏于俄亥俄州的艺术博物馆中。这部著作存在很多疑点，它是否是德拉自己的画作，最终还是没有得到肯定的答案。

第4章

阿基米德

> 这些（阿基米德）设计、发明的（战争）机器只是几何的一种娱乐而已，没有任何实质意义。
>
> ——布鲁达克，《马塞卢斯的生活》

继欧几里得之后，数学史中下一个伟大的名字是阿基米德（公元前287—前212）。阿基米德出生于西西里岛的锡拉库扎，他是公认的古代伟大科学家。阿基米德完美地把纯数学形象化，他是一个投身于科学研究的人，而且还把他的发现应用于实践。阿基米德众多的机械发明都成为传奇。其中的螺旋驱动泵直到今天仍在世界的某些地方使用，还有他发明的机械滑轮，借其可以几乎毫不费力地提起一只小船。他还发现了物体浮动的定律。有这样的传说，西西里的统治者海伦国王怀疑他的王冠是用低等黄金而不是纯金制作，他召见阿基米德来验证此物。阿基米德把自己的身体和国王的王冠都沉入锡拉库扎的公共浴池里，然后他对这个王冠所排出的水量进行称重，根据这一排水量，阿基米德得出结论说这个王冠的确不是纯金打造的。由于过分激动，阿基米德在大街上裸奔，并不时高喊："我发现了！"

当罗马艇队围攻锡拉库扎时，国王命令阿基米德设计可以护城的武器。阿基米德抛开他自己的诸多深奥的研究，设计了可以放置在城墙上的巨大起重机。当敌艇靠近时，可以将其拉出海面，吊在空中，结果敌

人大败。国王还命令他去建造巨大的抛物镜面，类似于今天的圆盘式卫星电视天线，这一装置可以收集太阳光线，然后再把它们聚焦于敌船，使其燃烧。[1]这样的工程技艺使他的名声传遍了整个帝国。当罗马最后攻破这个城市时，罗马指挥官马塞卢斯命令他的部下不要伤害这位伟大的科学家。一名士兵在海滩上发现这位老圣人，他正弯着背蹲在沙滩上画的一幅图旁边。由于没有听从士兵的命令站起来，阿基米德被杀害了，这位历史上最杰出的科学家就这样结束了他的生命。(具有讽刺意味的是，我们还要感谢这一事件，因为我们由此知道阿基米德死亡的确切时间，这是古代史中绝无仅有的事情。)

在纯数学领域，阿基米德也留下了他永恒的印迹。是他首先定义了抛物线区域，发现了螺旋线的很多性质，揭示了嵌在一个圆柱内的球体的表面积等于这个圆柱表面积的三分之二，体积等于这个圆柱体体积的三分之二。由于这一发现给他留下了深刻的印象，阿基米德要求在他的墓碑上刻出一个圆柱内有一个球体的图样，马塞卢斯满足了他的愿望。

阿基米德的很多著作经过后来的复制或翻译得以保存下来，但是还是有一些丢失了，它们的存在只有从后来人的引用中才能知道。1906年，人们意外地在伊斯坦布尔的一家修道院里发现了其中一部丢失了的著作，这使得我们有机会一览古代最伟大的大脑的工作过程。[2]



在他的著作《圆的测量法》中，阿基米德给出了π的值（这是圆的周长与其直径的比率）在$3\frac{10}{71}$到$3\frac{10}{70}$之间。他的想法是把一个圆放在有更多边的内接多边形与外切多边形之间，然后寻找这些多边形的周长，根据这些周长可以得到更加接近π的值。尽管在此之前已经知道π的相当精确的近似值，但是，是阿基米德首先发明出一种算法，或说一种程序，

使得我们可以在任意的精度下计算出π的值。在这里，我们用现代记法表示他的方法，他的方法是反复使用毕达哥拉斯定理。

图 4-1 给了一个圆心为 O、半径为 1 的圆。线段 AB 表示一个正 n 多边形（n 条边都相等且 n 个角都相等的多边形）的一条边，设这条线段的长度是 s_n。设 OC 是 AB 的中垂线，设它与圆相交于 D 点。因为 D 把弦 AB 分成两份，因此 AD 和 BD 是正 $2n$ 边形的边；设其长度是 s_{2n}。阿基米德设计出一个根据 s_n 的值寻找 s_{2n} 的值的公式。

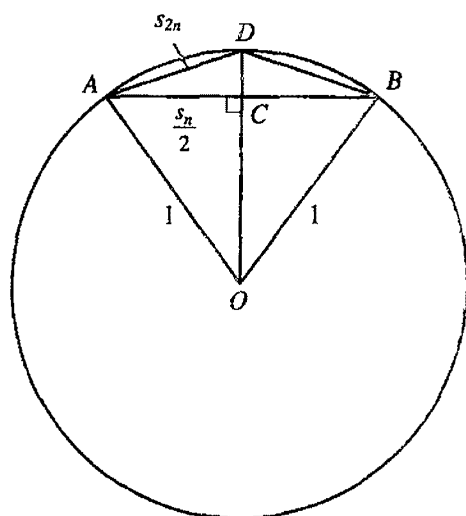


图 4-1　一个多边形和它内接的圆

通过在直角三角上运用毕达哥拉斯定理，我们得到

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + (OD - OC)^2 \tag{1}$$

再次使用毕达哥拉斯公式，这一次是运用于直角三角形 ACO，于是我们得到

$$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2}$$

把上面公式代入到方程(1)中，因为 $OD = OA = 1$，$AC = s_n/2$，$AD = s_{2n}$，

我们得到

$$s_{2n}^2=(s_n/2)^2+\left[1-\sqrt{1-(s_n/2)^2}\right]^2$$

稍微做一下代数运算，上面的公式就可以重写为

$$s_{2n}^2=2-\sqrt{4-s_n^2} \tag{2}$$

开方，最终得到

$$s_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}$$

我们利用这个公式就可以从 s_n 求得 s_{2n}。

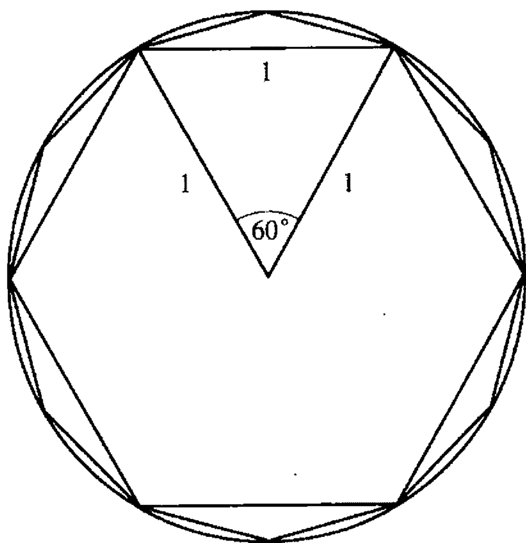


图 4-2 内接于圆的一个正六边形和一个正十二边形

阿基米德从正六边形（$n=6$）开始运用这个公式，正六边形的每一条边都等于半径1（图4-2）。利用方程(2)和 $s_6=1$，求得了正十二边形（$n=12$）的边的长度：

$$s_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-1}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

把上面这个表达式的两边平方，并代回到方程(2)中，再化简，得到

$$s_{24}=\sqrt{2-\sqrt{4-(2-\sqrt{3})}}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

重复这一过程，得到

$$s_{48}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

最后

$$s_{96}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

为了求得这个 96 边形的周长，我们需要求 s_{96} 乘以 96，并得到相应的π值，我们要把这个值除以 2（由π的定义，它是单位圆的周长的一半）。于是给出π近似值 $48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}\approx 3.14103$，或者非常接近 $3\frac{10}{71}$。

阿基米德使用有 6、12、24、48 和 96 条边的一系列外切多边形重复了这一过程，这得到更简练的计算公式

$$s_{2n}=\frac{2\sqrt{4+s_n^2}-4}{s_n} \tag{3}$$

其中，s_n 表示内接 n 多边形的边的长度。像方程(2)一样，上面这个方程可以利用毕达哥拉斯定理得到证明（附录 E 中给出一个证明）。阿基米德还是从正六边形开始。这一次是外切正六边形（图 4-3）。为了求得这个正六边形的边长，我们注意到△OAB 是等边三角形，所以 $OA = OB = AB = s_6$，$AC = s_6/2$，$OC = 1$。对直角三角形 OAC 运用毕达哥拉斯定理，我们得到 $OA^2 = OC^2 + AC^2$，即 $s_6{}^2 = 1^2 + (s_6/2)^2$，由此我们可以得到 $s_6 = 2\sqrt{3}/3$。

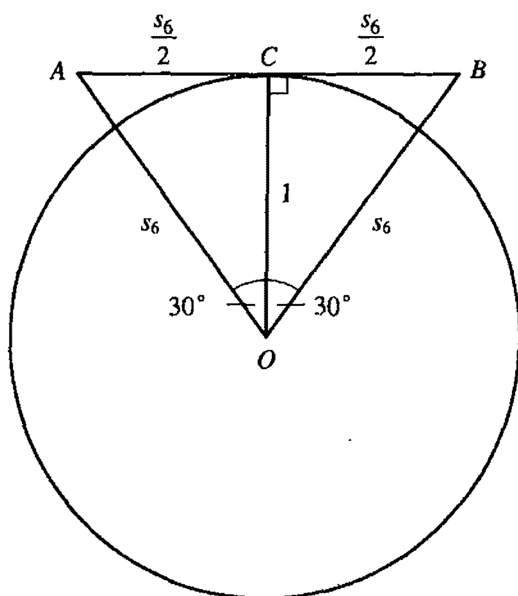


图 4-3　一个圆的外切正六边形（只展示了一个边）

然后，阿基米德把这个值代回到方程(3)中求 s_{12}，重复这一过程三次，就可以得到 s_{24}、s_{48} 以及最终的 s_{96}。同前面一样，为了从这些表达式得到π的近似值，我们需要把每一个 s_n 与 n 相乘然后再除以 2。对于 96 边多边形，阿基米德得到π的值是 3.142 71，或更接近的值 $3\frac{10}{71}$。因为实际的圆被放在内接和外切多边形中，所以他得出结论说π的精确值在 $3\frac{10}{71}$ 到 $3\frac{10}{70}$ 之间。[3]

阿基米德并没有将π的值再计算到更精确的程度。但是，他指出可以反复利用上面的过程来改进这个值的精确度，直至理想的程度。这是因为每当边数增加一倍时，内接多边形和外切多边形就会把这个圆挤得更紧，把π的值夹在上限与下限之间，就像一把钳子用它的两个爪把物体夹在中间一样。表 4-1 给出这个逼近值，使用边数分别为 3、6、12、24、48、96 和 192 的正多边形可以给出π的近似值到五位。π的实际值取到第五位是 3.141 59。

表 4-1

n	内接 n 边形	外切 n 边形
3	2.59808	5.19615
6	3.00000	3.46410
12	3.10583	3.21539
24	3.13263	3.15966
48	3.13935	3.14609
96	3.14103	3.14271
192	3.14145	3.14187

这是一项了不起的工作，如果我们考虑到古希腊人没有计算数的更有效方法，这项工作就越发显得了不起了。他们的方法是介于古巴比伦的60进制体系和他们自己的体系之间的一种方法，他们的体系是每一个字母对应一个数（$\alpha=1$， $\beta=2$，以此类推）。这是一种加法体系，对于计数物体来说足够了，但是在做计算的时候，就非常地笨拙。阿基米德就是利用纸莎草纸和铁笔计算的，或者更有可能的是在沙子上画图计算的。

阿基米德的这一过程背后的思想就是我们所知的穷尽法，这是由阿基米德的先辈欧多克斯首先公式化的（参见第3章后的补充2），但是，正是阿基米德在他的著作中推广使用了这一方法（他寻找抛物线段围绕的区域的方法就是基于此的）。此时，这已经非常接近我们现在的积分计算。

注释和参考文献

[1] 然而，人们还是有很多疑问，就是阿基米德是否有把反射平面磨光到所需要的程度的技术，使得它们发挥效应。参见“Briton Questions Archimedes's Feat”，《纽约时报》，1965年1月10日，以及“Recreating an Ancient Death Ray（他们是利用镜子做到的）”，《纽约时报》，2005年10月18日，p.D1。

[2] 这个奇妙发现的故事是一个传奇。阿基米德的著作《方法》的复制本的原稿是重写本的形式，也就是在早前写过字的原稿上再重新写一次，以便节省昂贵的羊皮纸。这份新手稿是一份 12 世纪的宗教文章，没有完全抹掉原来写在上面的东西，后来经过仔细辨认，读取了大部分旧文章。参见 *The Archimedes Palimpsest*(挪威首都奥斯陆 1998 年 10 月 29 日的拍卖目录；佳士得拍卖行，1998)，和希思编辑的《阿基米德全集》(1897；Dover, 1953；这个版本包括了阿基米德所有保存至今的著作，包括《方法》)。

[3] 当 $n=6$ 时，方程(3)给出简单的表达式 $s_{12}=4-2\sqrt{3}$，但是，当 $n=24$, 48, 96, …, s_{2n} 的表达式是变得越发复杂。因此，很多作者更愿意使用三角法得到这些公式。图 4-4a 给出了内接于单位圆内的正 n 边形的一条边。我们有 $\alpha=\angle AOB=360°/n$，所以在直角三角形 OAC 中，$\sin(\alpha/2)=(s_n/2)/1$，由此我们得到 $s_n=2\sin(\alpha/2)=2\sin(180°/n)$。类似地，对于外切正 n 边形（图 4-4b)，我们有 $s_n=2\tan(180°/n)$。

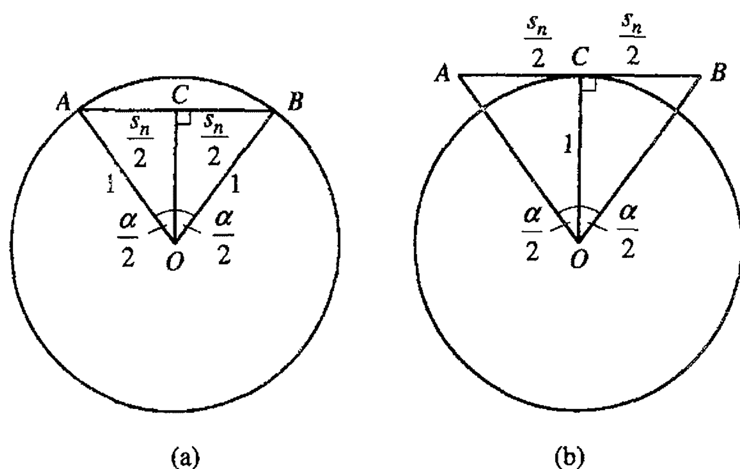


图 4-4　公式 $s_n=2\sin(180°/n)$(左边)和 $s_n=2\tan(180°/n)$(右边)的推导

当然，这些公式与方程(2)和(3)相比要简单。然而，我们应该记住，在阿基米德时代，不存在三角法（大约公元前 150 年希帕科斯发现了这一方法)，所以他自己不会使用这种方法。

关于阿基米德原来的推导方法（英文翻译本)，可以参阅希思的《阿基米德全集》，pp.91-98。

第5章

翻译者和注释者，500—1500年

> 我们的时代真是不幸，因为对于字母的学习已在我们中间消失，因此很难找到能够记录这一时期历史的人。
>
> ——格雷戈里主教（538—594），
>
> 引自大卫·史密斯的《数学史》，卷1，p.183

因为有了阿基米德，希腊数学的黄金时代达到了它的顶峰。当然，其后还有很多著名的学者，但那时希腊数学的前进步伐显示它已过了其高峰时期。他身后的学者中，有两个人名声鹊起：阿波罗尼奥斯和丢番图。关于圆锥的课题，阿波罗尼奥斯（约公元前262—前190）写了一本宏大的专著，这一课题是欧几里得没有研究过的。在这一著作中，他使用了与现代大致相同的方法。用一把刨刀去刨一个圆锥时，根据这把刨刀与圆锥底面所成的角度是小于、等于还是大于圆锥底与圆锥母线的夹角来给一系列曲线命名，正是阿波罗尼奥斯使用椭圆、抛物线、双曲线等一系列名字描述了这些曲线。[1]

丢番图的生卒年份我们都不知道（最有可能的是在公元前3世纪）。他写了几本著作，其中最具影响力的是他的《算术》，这是一本关于数论和代数方程的巨作。同阿波罗尼奥斯的情况一样，这一巨作的十三卷中只有六卷被保留了下来。在这些遗留下来的著作中，我们发现了对大约130个问题的详细解答，其中包括一次、二次，有时是更高次的多变量

方程的解答。这些问题中很多是关于如何把几个数的和、差或积写成完全平方的方法。例如卷 III 的命题 19 就是证明下面这个等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2$$

这一等式表明，每个数都是两个数的平方和时，它们的积等于两个数的平方和。例如，$65=5\times13=(1^2+2^2)\times(2^2+3^2)=(1\times2\pm2\times3)^2+(1\times3\mp2\times2)^2$，这给出两种形式的平方和 8^2+1^2 或者 4^2+7^2。1202 年这个等式在斐波那契的《算盘书》中出现。我们将有机会在附录 C 中使用这个公式构建毕达哥拉斯三元组。[2]

后阿基米德时代还出现了几位令人瞩目的应用数学家：埃拉托塞尼（约公元前 275—前 194），这个人是阿基米德的朋友，他对地球半径的计算达到了相当高的精度（著名的“埃拉托塞尼筛法”就是以他的名字命名的，这是一种从其余正整数中清除素数的方法）；第二位是希帕科斯（公元前 190—前 120），他是三角学的创始人和第一份精确星图的作者；第三位是托勒密（约 85—165），他的巨作《至大论》（共有十三卷，模仿欧几里得的《几何原本》）概括了那个时代已知的希腊世界版图，这是以地球为中心的宇宙，在这个宇宙里太阳、月亮、行星和其他星星以完美的圆轨道围绕地球运动。这些科学家认为数学和天文学实质上是同一门学科，这一观点在 16 世纪很盛行。实际上，文艺复兴时期很多科学先驱都同时在这两个领域取得成就，其中就包括哥白尼、伽利略和开普勒。



希腊数学的漫长历史中最后一位令人注目的数学家是帕普斯，他大约生活在公元 3 世纪。他为欧几里得的几本著作做了注释，其中包括《几何原本》，但是这些注释几乎全部丢失了，我们只能通过后来的作者了解

一些内容。一本只有部分遗留内容的著作是他的《数学汇编》，共有八卷，其中只有六卷比较完整地保存至今。这些著作包括对比例、几何体、球体以及各种平面曲线的论述。卷 V 讨论了等周问题，这是寻找有给定周长的最大面积几何图形的问题。当今，这个课题是用变分法来研究的。变分法是普通积分的一种扩展，它所研究的是函数的最大或最小定积分，而不是函数本身。在《数学汇编》中我们还可以发现两个帕普斯自己发现的定理：一个定理在卷 VII 中，是关于求旋转几何体的表面积和体积的定理[现在我们把这个定理称为以瑞士人古尔丁（1577—1643）命名的古尔丁定理，尽管后者很有可能知道帕普斯比他早发现大约 1000 年]；[3] 另一个定理出现在卷 IV，是毕达哥拉斯定理的一个扩展。

> 设 *ABC* 是任意三角形，并设 *ABDE* 和 *ACFG* 分别是构建在边 *AB* 和 *AC* 上的两个平行四边形（图 5-1）。延长 *DE* 和 *FG* 直到它们相交于 *H*。分别做平行于 *HA* 且等于 *HA* 的 *BM* = *CN*。这产生一个平行四边形 *BMNC*。帕普斯定理说的是，这个平行四边形的面积等于原来的平行四边形面积的和。

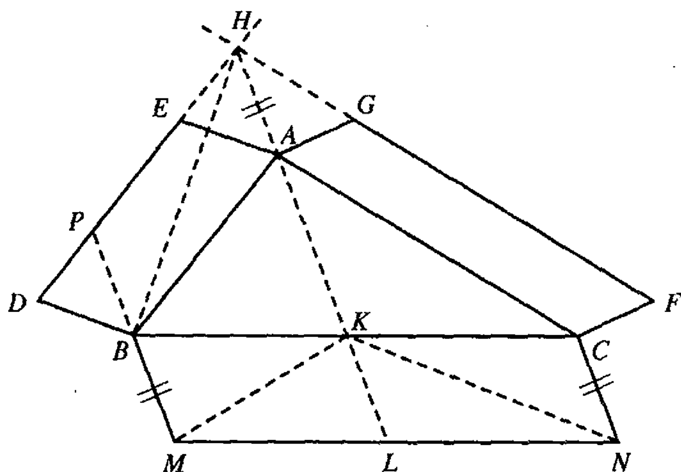


图 5-1 帕普斯定理

这个定理的证明思路类似于欧几里得I-47中的毕达哥拉斯定理的证明。延长HA使其与BC相交于K且与MN相交于L。这条延长线把平行四边形$BMNC$分成两个平行四边形$BKLM$和$CKLN$。我们认为$BKLM$的面积等于$ABDE$的面积；类似地，$CKLN$的面积等于$ACFG$的面积。

为了证明这一点，延长MB直到它与DE相交于P。我们有$\mathbf{A}_{ABDE}=\mathbf{A}_{ABPH}$（其中$\mathbf{A}$表示面积），这两个平行四边形有共同的底$AB$且对边$DE=PH$位于同一直线上。现在，做对角线$HB$，这条对角线把$ABPH$分成两个全等的三角形$ABH$和$PBH$。我们有$\mathbf{A}_{ABPH}=2\mathbf{A}_{ABH}$。但是，三角形$ABH$和$BKM$有相同的面积，因为它们有相等的底$HA$和$BM$，且顶点$B$和$K$位于平行线上。因此，

$$\mathbf{A}_{ABDE}=2\mathbf{A}_{BKM}=\mathbf{A}_{BKLM}$$

用完全相同的方式，我们可以得到

$$\mathbf{A}_{ACFG}=2\mathbf{A}_{CKN}=\mathbf{A}_{CKLN}$$

把上面这两个等式相加，最后我们得到

$$\mathbf{A}_{ABDE}+\mathbf{A}_{ACFG}=\mathbf{A}_{BMNC}$$

这就是帕普斯定理。毕达哥拉斯定理是这个定理的特殊情况，其中A是直角，且这两个平行四边形是正方形。

《数学汇编》包含很多更优美、更有创意的结果，它是创造性智慧的结晶，给希腊几何顶峰时代画了一个句号。从大约公元前600年的泰勒斯开始，持续了一千年之久的希腊数学王国结束于帕普斯。[4]



希腊数学及整个希腊文化的衰退不是空穴来风。巨大的政治和社会变革已势不可挡。公元前212年，罗马人统治着锡拉库扎（前面已经提到，

我们要感谢这一事件，它使得我们知道了阿基米德确切的死亡时间)。不久之后，罗马人又占领了迦太基，在 100 年间整个地中海盆地都变成了罗马帝国的一部分。托勒密王朝统治下的埃及直至公元前 30 年仍然保持着相对独立，但随后也陷入罗马的统治。罗马政府通常不介入它所统治的这些国家的文化和经济生活，只要求他们支付税金且不起义反抗。但是，这种相对的和平共存的状态不久就被打破。公元 330 年，皇帝康斯坦丁一世热衷于基督教，宣布把拜占庭城当作首都，改名为君士坦丁堡。60 年后的 389 年，无法想象后果的文化灾难发生了，在一场基督教徒针对异教徒的暴乱中，亚历山大的著名图书馆被烧毁。在熊熊的大火之中，埃及人引以自豪的 50 多万册的卷轴收藏成为灰烬，这几乎是古代世界的全部人文和科学的遗产。

其后不久的 392 年，皇帝狄奥多西宣布基督教是罗马的正教。395 年他死的时候，帝国分裂成东罗马和西罗马。尽管希腊世界没有发生变化，仍然支配着东部，但是它作为知识和文化中心的地位已经在快速衰落。476 年，罗马城陷入汪达尔人的统治，从而结束了强大的罗马帝国时代。529 年，查士丁尼大帝关闭了由柏拉图创建的几乎有 900 年历史的雅典柏拉图学园。学园少数幸存的学者逃到埃及或波斯，尽管条件非常不好，但在那里分散的学术中心仍继续发挥着作用。亚历山大图书馆获得部分重建，但它再也无法再现之前的辉煌。641 年，阿拉伯人占领了亚历山大。在它的伊斯兰教主的命令之下，图书馆的残留部分也被烧毁了，作为古代世界的最重要的研究中心的亚历山大，走到了尽头。黑暗的中世纪即将开始。[5]



但是，还是有少数学者通过注释前辈遗留下的著作而使研究的传统

流传下来。其中有两个人值得一提：塞翁和普罗克鲁斯。

亚历山大的塞翁大约生活在公元4世纪末。大约在公元390年前后，他重新修订了《几何原本》，这个修订本成为后来欧几里得几何学的基础。他还给托勒密的《至大论》写了十一卷注释。塞翁的名字永远与他的女儿希帕绨娅（约370—415）连在一起。希帕绨娅在塞翁的指导下学习，后来她本人也成为了数学家。据说她注释了丢番图和阿波罗尼奥斯的著作。因她的声誉如此之高，依据惯例，她被邀请担任亚历山大新柏拉图学园的园长。希帕绨娅聪明、漂亮而且口齿伶俐，这招来了宗教暴徒的忌妒和恼怒。她遭到传播异教的指控，并被残忍地杀害，数学史上第一位女性的生命就这样结束了。[6]

普罗克鲁斯（约412—485）出生于拜占庭，就学于亚历山大，后来成为雅典学园园长。他主要以他的《欧德莫斯概要》而闻名，这本著作包括他自己对《几何原本》卷I的注释，以及到欧几里得时代为止的希腊几何学的历史概况。这一著作是以亚里士多德的学生欧德摩斯的早期著作《几何历史》的片段为基础编写的。在《欧德莫斯概要》中，我们发现了欧几里得的著名格言，“几何无王道”。正是通过普罗克鲁斯注释，我们可以推断由毕达哥拉斯给出的毕达哥拉斯定理的证明，即割补证明。

> 考虑边长为 $a+b$ 的正方形（图5-2）。连线每条边上线段 a 和 b 的分割点形成一个倾斜的正方形，并称其边为 c。因此，原来的正方形被分割成分五个部分，其中四个部分是直角边为 a 和 b，斜边为 c 的全等直角三角形，而第五部分是边长为 c 的内部的正方形。图5-3给出另一种不同的分割。比较这两个图形的各部分面积，我们有
>
> $$4ab/2 + c^2 = 4ab/2 + a^2 + b^2$$

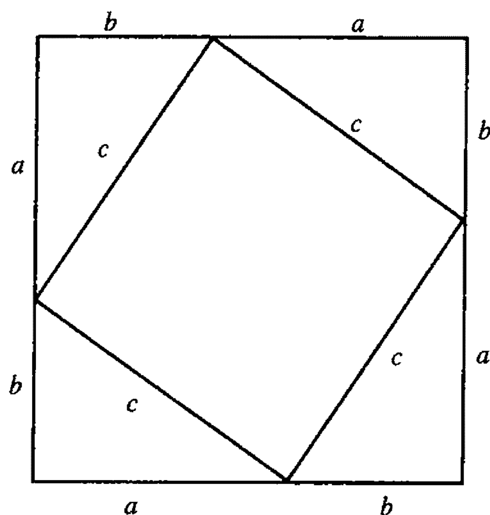


图 5-2　正方形的分割

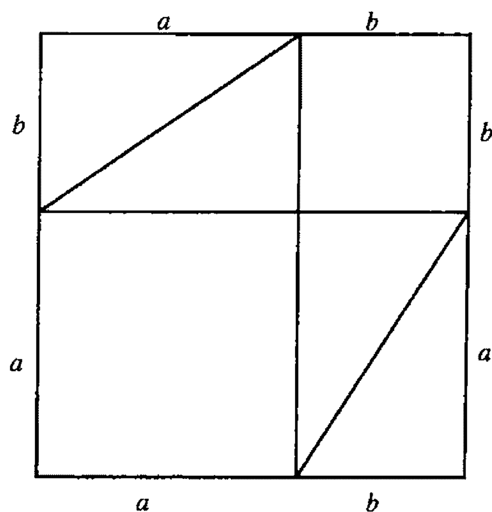


图 5-3　一个不同的分割

根据这个等式，我们得到 $c^2 = a^2 + b^2$。这实际上是前面第2章中给出的“中国证明”，对此我们稍后讨论。这一证明包含一些细节，例如证明四个直角三角形实际上是全等的。而这基于三角形内角和等于两个直角的定理，《欧德莫斯概要》指出毕达哥拉斯学派已经知道后者。[7]



泱泱大国的中国虽与西方几乎隔绝，但它的文明已经发展到了相当的高度，其成就包括造纸、木刻板印刷、火药和指南针，比欧洲知道这些发明要早数百年。悠久的中国历史至少要回溯到公元前 3000 年，其间出现过很多中国人引以自豪的文人，他们留下诗歌、哲学、天文学以及数学等文献，同时还有关于农业和技术等应用课题的文献。中国人也烧毁过他们自己的“图书馆”，在公元前 213 年，秦始皇下令烧掉现存的所有书籍，这道法令毁灭了几代文人留下的文化遗产。幸运的是，有一些书籍逃脱了这场大火，而其他的一些书籍又根据记忆得到修复。

最古老的中国数学著作之一是著名的《周髀算经》（“日晷仪和天体圆路径的算术经典”），这一著作的年代无法确定，大约是汉朝的著作（公元前 206— 221），甚至可能更早。[8]虽然这部著作主要是关于历法的，但其中包含了一些中国早期数学的内容。这一著作的第一部分是，君主周公和一个叫做商高的人之间的对话，话题是直角三角形的性质。这里，我们找到这样的诗句：“分割直线，做出一个宽为 3、长为 4 的矩形，那么对角之间的距离是 5。①”这显然指的是边为 3-4-5 的三角形。[9]书中用如下文字叙述毕达哥拉斯定理：“柱子（指时针）的高度和阴影的长度（底）各自与自己的值相乘求平方，对这些平方求和，再取平方根。”即 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 。还有一个示范图给出一个（3,4,5）的直角三角形（图 5-4），但是很容易把这个证明扩展到任意直角三角形上。这个图还附带一条解释说明。

因此，让我们（沿着对角线）分割一个长方形，使得宽（勾）

① 《周髀算经》中的原文为“故折矩，以为勾广三、股修四、径隅五”。——译者注

为 3（个单位），长（股）为 4（个单位）。于是，两个角之间的对角线（弦）是 5（个单位长）。现在，在这个对角线上做正方形，使得半个矩形被留在这个正方形的外面，于是形成一个正方形。因此，宽 3、长 4、弦 5 的四个外面的半个矩形合起来形成两个面积等于 24 的矩形，于是剩余的面积等于 25（从面积等于 49 的正方形中减去 24）。这个过程称之为“堆放矩形”（池楚）。[10]

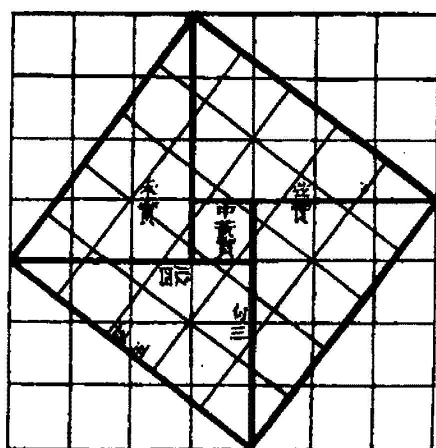


图 5-4　毕达哥拉斯定理的中国证明

这里，“矩形”指的是 3 × 4 的 4 个矩形中的任意一个，“半个矩形”指的是边为 3-4-5 的直角三角形。“用半个矩形限定它（指的是对角线上的正方形）”的意思是用 4 个 3-4-5 的直角三角形把这个斜着的 5 × 5 的正方形包围起来，这 4 个直角三角形等于我们开始时的直角三角形。这样一来就创建了外面的一个 7 × 7 的正方形（面积等于 49 的板子）。从这个正方形中扣除 4 个矩形的面积，我们有 49−24 = 25，这就是那个斜着的正方形的面积。

当然，这不是希腊风格的证明。在希腊证明中，一系列逻辑推理井然有序，是从少量、公认、自明的公理出发开始证明的。而中国人的证明思想则是生成一个令人信服的实例，然后再由此推出一般情况。引用著名的学者李约瑟的说法，"按中国人的方法，几何图形充当一种变形的手段，由此数量关系就被扩展成代数形式。"[11]在上面这个例子中，代数形式应该是 $c^2 = (a + b)^2 - 4ab/2 = a^2 + b^2$，其中 a 和 b 是位于角落的矩形的长和宽。[12]

这种证明完全符合古老中国的传统，它把一个平面图形割补然后再用不同方法把它们合拼起来，就如在拼图游戏中所做的那样。实际上，上面引文中的"堆放矩形"一词指的就是把图 5-4 中的正方形割补，然后再把它合拼起来直到面积相等。为了增强形象效应，在后来版本中这个图表被涂上颜色，内部的小正方形是黄色，它周围的矩形是红色。[13] 1000 年后，印度数学家婆什迦罗（约 1114—1185）给出了相同的证明。他只简单画出图 5-4 中的那个倾斜的正方形，没有对"看"这个词给出任何文字的补充，没有任何说明的这种证明在现代数学杂志中很流行。

矩形的宽和长的中文表述分别是勾和股，所以毕达哥拉斯定理在中国称为勾股定理。同样，在中国著作中也出现很多与之相关的问题，大多数是实践性问题。在这里我们举一个例子，断竹子。这个问题最早出现在《九章算术》中，其写作年代可以追溯到汉朝，尼达姆把它描述成为"中国所有数学著作中最重要的"一本。[14]这个问题通常附带一个插图（图 5-5）。它第一次出现在杨辉的著作《详解九章算法》中，年代大约为公元前 126 年。这个问题是这样的：

> 有一根竹子 10 尺高，这根竹子的上端被折断，垂到地面

距其根部为 3 尺。那么折断的高度是多少？[15]

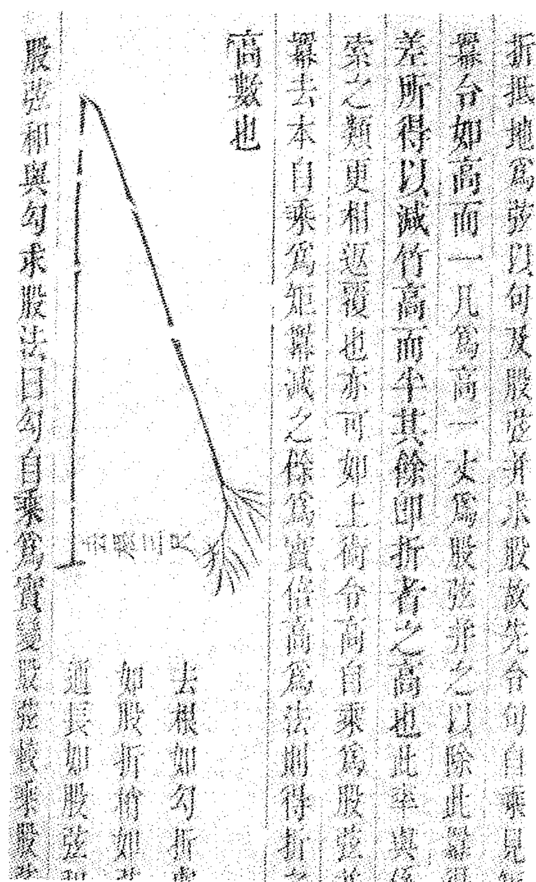

折抵地爲弦以句及股弦并求股故先令句自乘見
冪令如高而一凡爲高一丈爲股弦并之以除此冪
差所得以減竹高而半其餘即折者之高也此率與
索之類更相返覆也亦可如上術令高自乘爲股弦
冪去本自乘爲矩冪減之餘爲實倍高爲法則得折
高數也
去根如勾折
如股折梢如
通長如股弦
股弦和與勾求股法曰勾自乘爲實變股弦較乘股

图 5-5 断竹

设折断点距离地面为 x 尺，从折断点到顶部的距离是 a（图 5-6）。折断部分的顶点到这根竹子的根的水平距离是 b，于是我们有

$$b^2 = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x) \tag{1}$$

但是 $a + x = h$ 是这根竹子的总高度，所以我们可以把方程(1)写成

$$b2 = h[(h-x)-x] = h(h-2x)$$

解上面的方程求 x，我们得 $x = (h^2 - b^2)/2h$。这个解是由杨辉“如此这般”构造出来的。把 $h = 10$ 和 $b = 3$ 代入这个解中，就得到答案 $x = 91/20$ 尺。

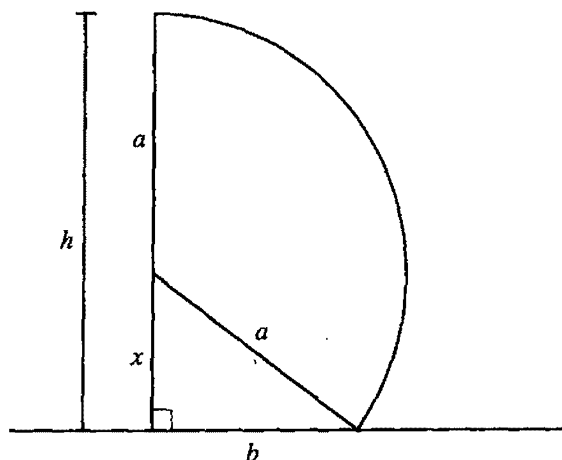


图 5-6　断竹：示意图

这里，我要引用乔治·约瑟夫《孔雀之冠：非欧洲的数学之根》中的一段话来结束我们关于中国人在毕达哥拉斯定理中的作用的讨论。

> 勾股定理在建立代数几何以及它对中国代数的发展所做的贡献是无法估量的。它奠定了几何推理的基础，打破了以往人们的偏见，认为凡是未受希腊数学影响的其他古代数学都是代数式的和经验式的。[16]



与中国相比，印度次大陆则处于几何文明的交叉路口。北边是中国和阿富汗，只能通过喜马拉雅山的一些高山关口相互往来，西北是波斯和中亚大平原，西边是阿拉伯半岛和更远处的地中海。另外，印度大部分与海接壤，东边是孟加拉海湾，西边是阿拉伯海。因此，印度文化受到众多邻邦的诸多影响，同时它的文化也影响着它们，这其中包括数学。

印度最早的数学著作是印度宗教活动的产物。所有著作统称 sulbasturas，研究的是献祭祭坛的尺寸问题，这在印度宗教中是一个非常重要的课题。一位名叫包德哈亚那的作者撰写了其中的一部 sulbasturas，其年代可以追溯到公元前 600 年或者更早些，这是希腊数学家泰勒斯的时代。[17]

在这本著作中，我们找到这样的陈述，“一根沿对角线被拉紧绳子在对角线的一侧生成一块等于原来正方形大小两倍的面积”。换句话说，这是毕达哥拉斯定理的一种特殊情况，是 45°-45°-90°的直角三角形。后来一本 sulbastura 的作者是迦旃延，这本著作给出了一般定理：“矩形对角线的绳子（沿长度拉紧）形成一块面积，这块面积是垂直边和水平边形成的面积和。”因此这段文字就给出如何构造长度为 36 英寸的祭坛的方法。这包括很多构成毕达哥拉斯三角形的辅助线 (5，12，13)，(8，15，17)，(12，16，20)，(12，35，37)，(15，20，25)和 (15，36，39)。[18]

前面提到的包德哈亚那的 sulbastura 还给出了“矩形正方形化”的方法，也就是如何构造一个正方形，使其面积等于给定的矩形。设这个矩形是 $ABCD$（图 5-7）。作 EF 等于 AB，并垂直 BC，形成一个正方形 $EFCD$。在 AB 和 EF 中间作 GH 平行于它们。现在把矩形 $ABHG$ 旋转 90°，把其移到位置 $FKLC$，使 $KL=AB$，$LC=BH$。以 C 为中心，旋转半径 CH 的弧，与 LK 的延长线交于点 P。我们有 $LP^2=CP^2-CL^2=CH^2-CL^2=(CH+CL)$

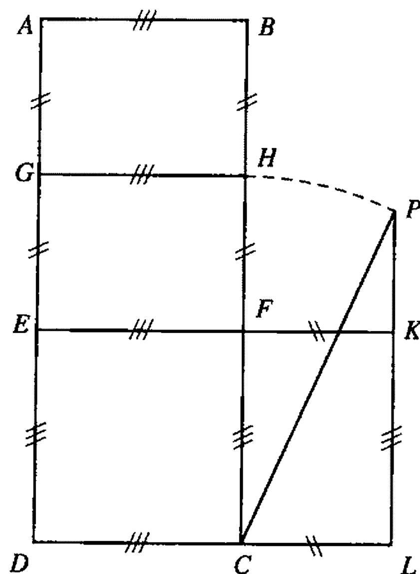


图 5-7　矩形的正方形化

$\times (CH-CL) = (CH + HB) \times (CH-HB) = (CH + HB) \times (CH-HF) = CB \times CF = CB \times CD$（注意这里的所有线段都是无向的，所以 $CL = LC$）。因此，以 LP 为边的正方形就是所求的正方形。[19]

同样是在这本 sulbasturas 中，还有构造一个正方形使得它的面积等于两个给定正方形面积和的方法。设 $ABCD$ 和 $EFGH$ 是两个给定的正方形，且 $AB > EF$（图 5-8）。沿线段 AB 取线段 $AP = EF$，连结 DP。我们有 $PD^2 = AP^2 + AD^2 = EF^2 + AD^2$，因此，构建在 PD 之上的正方形是所求的正方形。

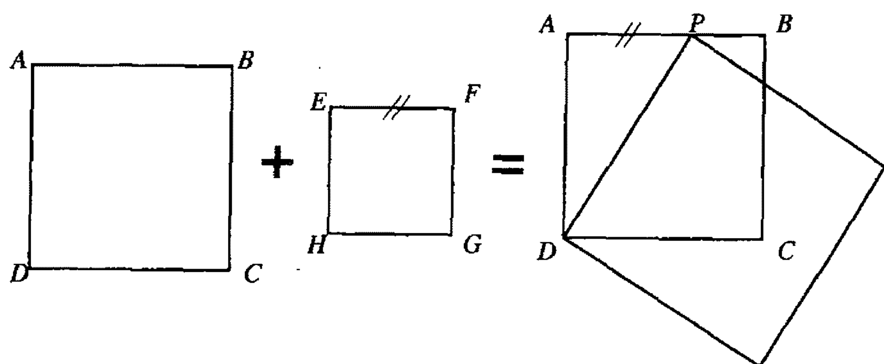


图 5-8　面积为两个正方形面积和的正方形的构造方法

这些例子明显表明，印度人比毕达哥拉斯更早就掌握了毕达哥拉斯定理，同时也说明他们知道如何把这个定理应用于实际问题。但是，说到他们对这个定理的证明时，我们又完全没有头绪。同中国人的情况一样，我们只能推测他们使用了某种证明方法，但这只能是推测。[20]



现在，我们回到地中海盆地和中东地区。先知穆罕默德于公元前 632 年死去后，伊斯兰教快速向北向西传播开来。在这个世纪结束之前，伊斯兰帝国已从东边的波斯扩展到西边的大西洋，从北边的中亚扩展到南边的撒哈拉沙漠。这种迅猛的扩张在 711 年达到顶峰，当时穆斯林人进

入了西班牙，并建立了长达800年统治的王朝。

这个大帝国的新统治者们都是强悍的勇士，但是他们也展现出强烈的学习热情。几个研究中心分别建立在巴格达、撒马尔罕（现在乌兹别克斯坦）以及西班牙的科多巴，帝国统治者鼓励犹太、穆斯林和波斯等各种族和宗教的学者们在那里定居。这些学者们研究、注释或评价遗留下的古希腊著作，这些书都是亚历山大图书馆那场火灾的幸存品，它们被较完整地保存在君士坦丁堡、大马士革和耶路撒冷等地的修道院里。对历史更为重要的是，这些学者们把数量巨大的亚述语、希腊语和梵语著作译成了阿拉伯语，再从阿拉伯语译成拉丁语，因此这些著作闻名于西方。多亏了这些学者们，求知的火焰在欧洲陷入黑暗年代时仍旧没有熄灭。

到了762年，哈里发曼苏尔（712?—775）把首都迁到了巴格达，并重新修建了这座城市使其成为主要的学术中心——“第二个亚历山大城”。在他的继承人哈伦·拉希德在位期间（786—809），一项重大的翻译工程开始了，即翻译欧几里得的《几何原本》和托勒密的《至大论》，这项任务一直到他的儿子马蒙在位时（809—833）才得以完成。[21] 马蒙在巴格达修建了一个观测站，在此他指导进行一系列的大地测量。在他的宫廷里住着一位最伟大的阿拉伯数学家花拉子米（大约780年出生于里海东岸的花剌子模王国，大约死于850年），人们认为他的经典著作《代数学》（*ilm al-jabr wa'l muqabalah*，书中所述“还原与对消的科学”）是关于代数的最早的重要著作（的确如此，“代数”一词就来自于上面题目中的al-jabr）。他的第二本著作只有拉丁语译本，是《印度算术书》，在这一著作中他倡导使用印度的10进制数字体系（现代词“运算法则”是由al-Khowarizmi的误传而来的）。这两本著作后来都对西方的数学教育的发展产生了巨大的影响。

我们最感兴趣的是伊本·奎拉（826—901），正如他的名字所提示的

那样，他是美索不达米亚的哈兰本地人。他是医生、哲学家和数学家，是把代数方法应用于几何的先驱。伊本 · 奎拉修改了早期的《几何原本》翻译本（图 5-9），并翻译了写于欧几里得到托勒密时代的其他几本希腊著作。他对三角学做了特殊的研究，这是一个与天文学关系密切的课题，同时他还研究了抛物线和抛物面。他的儿子和两个孙子继承了他的事业，成为了数学家和翻译家。

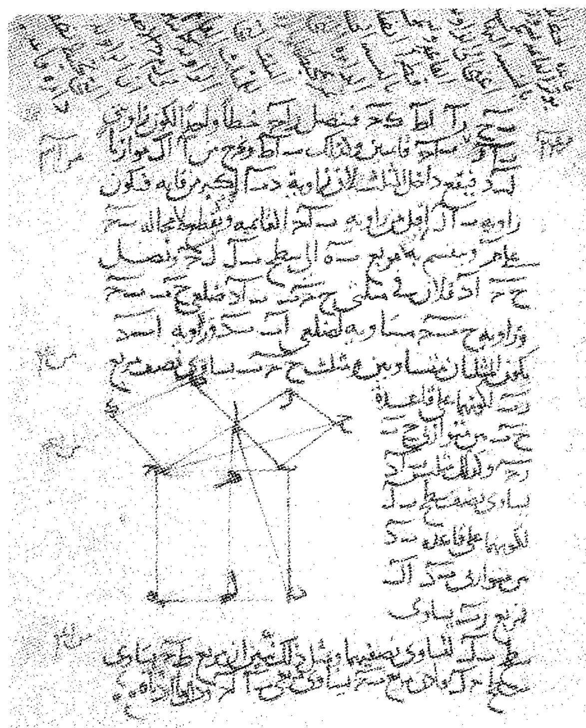


图 5-9　伊本 · 奎拉的欧几里得译本，所示为毕达哥拉斯定理

我们之所以对伊本 · 奎拉感兴趣，是因为他对毕达哥拉斯定理的扩展。设 ABC 是任意三角形（图 5-10）。从顶点 A 画直线 AM 和 AN 使得 $\angle AMB = \angle ANC = \angle A$。因此，$\triangle ABC$、$\triangle MBA$ 与$\triangle NAC$ 相似，因为每一个三角形都与原来三角形有一个公共角，且都有一个等于角 A 的角 。因此

$$AB/BC = MB/AB，由此可得 AB^2 = BC \times MB$$

且

$$AC/BC = NC/AC，由此可得 AC^2 = BC \times NC$$

根据上面两个等式，我们有

$$AB^2 + AC^2 = BC \times (MB + NC)$$

这就是伊本·奎拉定理。毕达哥拉斯定理是当角 A 是直角时的特殊情况。在 A 是直角的情况下，点 M 和 N 重合，且 $MB + NC = BC$（如前面一样，所有线段都是无向的）。[22]

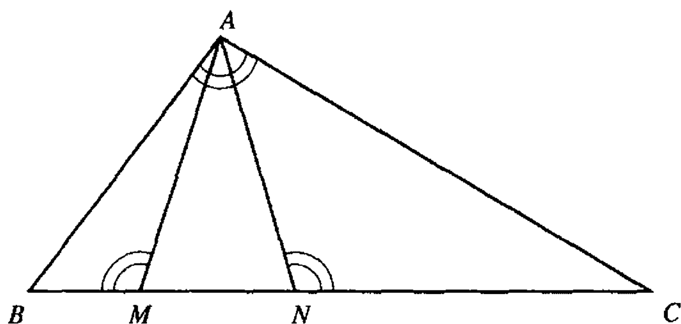


图 5-10　伊本·奎拉定理

由于位于东方的印度和中国以及西方的地中海各国之间，所以在古代文化和科学遗产向欧洲传播的过程中，穆斯林的地位是独一无二的。历史中具有讽刺意味的一件事就是当欧洲正处于黑暗时代时，伊斯兰的科学发展达到了黄金时代，这提供了某种意义下的新旧世界的延续。但是，不久后的政治和社会的剧变使这一黄金时代走到尽头。1258 年，巴格达陷入蒙古人的统治中，它的文化机构遭到了破坏。在一个短暂的时期内，乌鲁伯格（1393—1449）开始了统治，并在撒马尔罕建立了新的学术中心。它引以自豪的是拥有望远镜出现以前的最大天文台，而且一直保存到今天。乌鲁伯格的助手阿尔卡西（1429 年或 1436 年）撰写

了几本关于算术和几何的著作。他利用阿基米德的穷举法，使用了 3×2^{28} 条边的内接和外切多边形，把π近似到了相当高的精度，精确到 10 进制 16 位！但是，到了他死的时候，伊斯兰帝国东部的统治权已丧失殆尽。



当东方的学术中心逐渐衰败的时候，在伊斯兰教区的西部西班牙兴起了新的学术中心。基督教、犹太教和伊斯兰教的学者们投身于将希腊经典著作从阿拉伯语翻译成拉丁语或者希伯来语的工作中，同时还加入了他们自己的注释。这些翻译家当中最著名的就是杰拉德（1114—1187)。他好像出生于意大利的伦巴底，尽管有人说他是安达卢西亚人。他翻译了欧几里得《几何原本》和托勒密的《至大论》，这使得欧洲的学者们可以阅读这些著作。似乎是他第一次使用 sinus 表示一个圆心角所对的一半弦，就是我们现在所说的正弦函数。

慢慢地，欧洲从它长期的沉睡中苏醒了。1088 年在博洛尼亚建立了第一所欧洲大学，这之后又陆续建立了巴黎大学（1200)、牛津大学（1214)、帕多瓦大学（1222）和剑桥大学（1231)。学术中心逐渐地从天主教堂移向非宗教的公共机构，尽管这种转移的完成还要花费 4 个世纪的时间。这期间出现过多次倒退：英国和法国的百年战争（1338—1453）消耗了大半个欧洲的能量；其后是黑死病，一种来势迅猛的传染病，吞噬了欧洲大约三分之一的人口。

1453 年，君士坦丁堡陷入土耳其人之手，他们把城市的名字改成伊斯坦布尔。传统上认为这次事件是中世纪时代的结束，尽管不是黑暗时代的结束。1492 年，西班牙驱除犹太人之举使其丧失众多经济、艺术和学术方面的精英，损失无法弥补。同年，摩尔人失去在西班牙的势力，位于格拉纳达的中古西班牙摩尔人的最后堡垒阿汗布拉宫后来使年轻的

艺术家埃舍尔获得灵感。如果说在一年当中发生这些事件还不足够多的话，那么正是在1492年，克里斯托弗·哥伦布在新大陆登陆，开启了欧洲到新的广大土地的贸易之门，并带来无法想象的财富。新时代砰然开始了。

其实，不久之前，知识界更重要的突破已经产生了。1454年，一个住在美茵茨的德国人约翰内斯·古登堡发明了活字印刷机，第一次投入使用就印制了300册精装版的圣经。随后，各种各样的书开始大批量投入印制，行销全欧洲。到1500年，印制的书籍已有30 000种，900万册图书。从前那种古老费事的排版印刷方式已经永久地消失了。

不久，数学的经典著作出现了印刷版。1482年在威尼斯出现了《几何原本》的第一次印刷版，它是一本极具艺术性的科学著作，正文都配有彩色插图（图5-11）。9年后在佛罗伦萨出现了一本菲利普·卡兰奇的关于算术的著作，这本著作包含了第一个举例说明的意大利语的“字符问题”(图5-12给出两个与毕达哥拉斯定理相关的问题)。但是直到1570年，《几何原本》的英文版才出版。其翻译者是比林斯利，1596年他当选为州长和大伦敦政府市长。为这本书写前言的是约翰·笛（1527—1608)，这个人是三一学院最早的教员之一。一个世纪后，牛顿在这所学院成为教授。除了少数例外（例如，笛卡儿的《几何学》，这是他的1637年的论文，讨论的是分析几何，是用法语写成的)，拉丁语仍然是后来几百年间的科学的交流语言和书信语言。只有到了17世纪末，科学家们才用他们的母语写文章，这使得数学在每一个国家都更能接近大众。数学不再存在孤傲的学者圈子，对于那些想要打开自己的心智接受其教义的任何人都已成为可能。

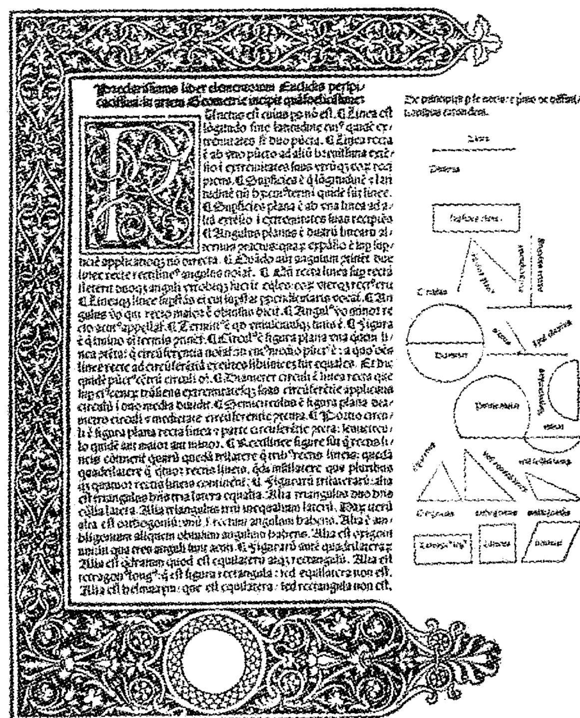
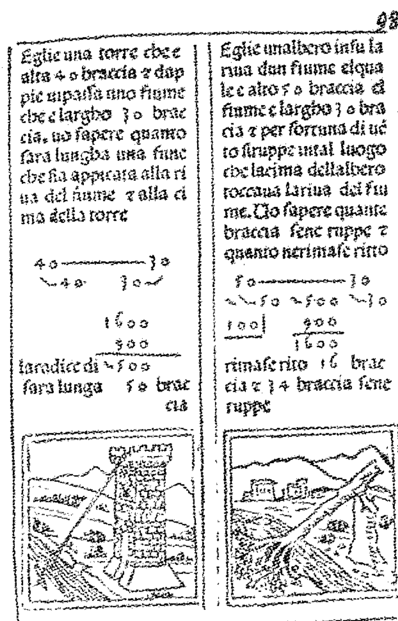


图 5-11 欧几里得《几何原本》的第一次印刷版（威尼斯，1482）


98

Eglie una torre che e
alta 40 braccia e dap
pie uipassa uno fiume
che e largho 30 brac
cia. uo sapere quanto
sara lungha una fune
che sia appicata alla ri
ua del fiume e alla ci
ma della torre

40 —— 30
40 30

1600
900
la radice di 2500
sara lunga 50 brac
cia

Eglie unalbero insu la
riua dun fiume elqua
le e alto 50 braccia el
fiume e largho 30 bra
cia e per fortuna di ue
to siruppe in tal luogo
che la cima dellalbero
toccaua la riua del fiu
me. Uo sapere quante
braccia se ne ruppe e
quanto ne rimase ritto

50 —— 30
50 2500 30
100 | 900
1600
rimase ritto 16 brac
cia e 34 braccia se ne
ruppe

图 5-12 菲利普·卡兰奇关于算术的著作中的一页，
给出与毕达哥拉斯定理相关的两个问题

注释和参考文献

[1] 要对阿波罗尼奥斯的著作有更多的了解，请参阅托马斯 · L. 黑斯的《希腊数学手册》（牛津大学出版社，1931），pp.352-376。还可以参阅伊夫斯的著作，pp.171-175, 191-1192。

[2] 要对丢番图的著作有更多的了解，请参阅托马斯 · L. 黑斯的《希腊数学》第 17 章。或者参阅伊夫斯的著作，pp.180-182, 197。

[3] 史密斯的著作，卷 1, pp.433-434。史密斯实际上称古尔丁为剽窃者，因为在他的著作中还写了帕普斯定理，但却没有给出其真正发现人的名字。

[4] 要对帕普斯的著作有更多的了解，请参阅托马斯 · L. 黑斯的《希腊数学》第 16 章。或者参阅伊夫斯的著作，pp.182-184，197-199。

[5] 这一简短的历史故事来自于伊夫斯的著作，p.164。

[6] 关于她的传记，请参阅玛丽莲贝利奥格尔维的《妇女与科学——古代通往十九世纪传记辞典和注释书目》（麻省理工学院出版社，1986），pp.104-105。

[7] 伊夫斯的著作，pp.80-81。

[8] 在这里我给出的拼写和翻译是根据李约瑟的详尽的著作而来的：《中国科学与技术史》（剑桥大学出版社，1959 年，10 卷），卷 3，p.19；其他的文献给出了不同的译文。根据李约瑟的著作，词 chao 可能指的是周代，但是它的意思也可能是“圆周”，这有可能暗指明太阳绕地球运行时的圆轨道。pei 指的可能是日晷的指时针，这根针就是一个棒，你可以根据它所投下的影子的长度推算数太阳的位置，就如日晷一样。关于《周髀算经》的更详细背景，请参阅上面的著作，pp.19-24。

[9] 史密斯的著作，卷 1，p.31。

[10] 李约瑟，《科学与文明》，卷 3，pp.22-23。插入语是李约瑟所注。

[11] 同上，pp.24。

[12] 等价地，我们可以把图 5-4 中斜着的正方形面积与内部的小正方形的面积相比，以此导出等式 $c^2=(a-b)^2+4ab/2=a^2+b^2$。

[13] 李约瑟，《科学与文明》，p.96。

[14] 同上，p.25。

[15] 我使用了乔治 · 约瑟夫《孔雀之冠：非欧洲的数学之根》中给出的翻译（普林斯顿大学出版社，2000），p.186。

[16] 同上，p.187。在中国有很多关于毕达哥拉斯定理的问题，其中包括以其为基础的数的问题。这些问题可以在法兰克 · 斯怀兹和 T. I. Kao 的《毕达哥拉

斯是中国人吗？古老的中国对直角三角形的研究》找到（宾夕法尼亚大学出版社，全美教师协会，1977)。这本书还有一个很长的书目。

[17] 这也许令人感到困扰，因为早前的所有印度著作的年代都不能确定。这些著作之所以得以保存了下来，只是因为它们被一次一次地复制，复制的年代通常被错误地认定是这些著作原来的年代。

[18] 前面的一段和后面的两段文字都是根据乔治·约瑟夫《孔雀之冠：非欧洲的数学之根》pp.240-230 而来的。毕达哥拉斯定理的两个公式表示的引用都来自于此。乔治·约瑟夫对印度从公元前 800 年到现代的数学做了非常优秀的研究。一个小问题就可以涉及很多关于数学历史的书籍。

[19] 你不得不注意到在这个构造性证明中所包含的内容要比欧几里得在卷 II 命题 14 中给出的要多得多，而且完全是以相似为基础的：设矩形是 $ABCD$。在同一条直线上作线段 AB 和 BC，共同点是 B（图 5-13)。以 AC 为直径作一个半圆。在点 B 作 AC 的垂线与半圆交于点 P。我们有 $\angle BAP = \angle BPC$，$\angle APC = 90°$。因此，三角形 ABP 和 PBC 相似，所以有 $AB/BP = PB/BC$，由此可以得到 $BP^2 = AB \times BC$。所以 BP 是要求的正方形的边。

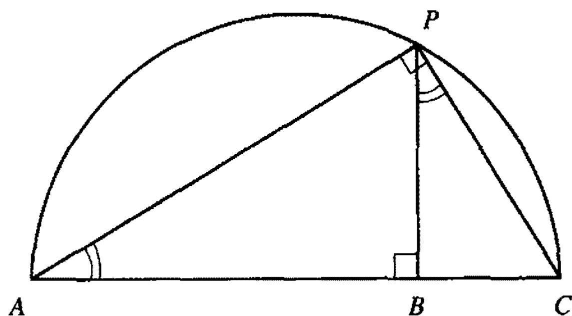


图 5-13　平方一个矩形：欧几里得的构造法

[20] 史密斯的著作（卷 1，p.97）还给出进一步的说明："没有理由相信印度人哪怕有一点点几何证明的想法。" 你可以断定所说的"几何证明"，他指的是希腊风格的证明，是根据少数公理来进行一系列推导的证明。但是，正如我们所了解到的那样，中国人和印度人的证明的概念是不同的。

[21] 阿拉伯人的名字的英语拼写因人而异。为了保持某种程度上的一致性，本书中我使用的是史密斯著作中的拼写。

[22] 参阅罗伯特 · 斯楼明的《从五根手指到无穷：漫长的数学历史》中的"泰比特 · 伊本 · 奎拉和毕达哥拉斯定理"，（法兰克 · 斯怀兹编辑，Open Court，1995)，第 43 章。

第6章

弗兰索瓦·韦达创造历史

> 文艺复兴是业余数学家的黄金时代。
>
> ——派特里·贝克曼，《π的历史》，p.97

阿基米德之后约1800年，法国的律师和业余数学家弗兰索瓦·韦达（1540—1603）因在某个代数公式上附加上“等等”一词而创造了历史，这个“等等”表示这个公式的过程可以无限地重复下去。当然，希腊人已经知道“无穷”的存在，但是因为缺少代数工具来研究，所以他们在数学世界中将其避开。“无穷”在后来两千多年一直是争议的课题，因而人们还是不惜任何代价地回避它。而韦达的“等等”一下子突破了这个古老的禁忌，无穷以闪电般的速度登上了数学的舞台中心。

韦达是众多服务于国家行政、政治和军事的首批数学家之一。尽管他在业余时间研究数学，但其声望非常之高，国王亨利五世遂令他去破译西班牙军队在与法国的战争中所使用的密码。韦达的成功使西班牙人发现他们的密码遭到破解，于是他们谴责法国人使用了巫术，“这不符合基督教信仰习惯”。[1]

然而，对数学的未来更加重要的是，韦达把符号引入到代数之中。在他之前，代数一直是用文字描述出来的，这就使得操作常规代数运算非常困难。韦达设计了一种体系，在这个体系中用辅音字母表示已知量，用元音字母表示未知量。这一体系后来经过笛卡儿的改进成为我们今天

所知道的形式（a,b,c 表示常量，x,y,z 表示变量），但是，正是韦达开启了从文字描述到符号代数的转变，可以说这一次的转变是数学史中最重要的发展之一。

韦达还对三角学做出了重要贡献。他展示了如何使用代数方法解决三角方程及如何用三角方程解决代数问题，是他首先用 $\sin x$ 和 $\cos x$ 表示 $\sin nx$ 和 $\cos nx$（他对 n 为从 1 到 10 的所有整数做了上面的工作，对于一般情况，大约是在韦达之后 100 年的 1702 年由伯努利建立的）。本质上，韦达把三角学从仅局限于解决三角形问题这样的课题转化成新时代的分析课题。

在韦达的生命后期，他卷入了几次争论之中，这使其名誉受损。他卷人的最激烈的争论是与德国数学家克利斯多弗·克拉维斯（1537—1612）之间关于改革儒略历的争论，这一公历是 1582 年在罗马教皇格里高利十三世的命令下制定的。克拉维斯是当时教皇的历法顾问，因此韦达对克拉维斯的讽刺攻击给他自己树立了很多敌人。韦达还反对太阳取代地球成为宇宙中心的哥白尼体系。他既是一个伟大的改革者也是受旧传统束缚的保守者，因此他是旧世界向新世界转变的过程中的产物。[2]



韦达在 1593 年发现的具有创新意义的公式是把数 $2/\pi$ 表示成无穷乘积：

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

（通常把上面的式子写成下面的等价形式，前面提过，韦达使用“等等”代替两个公式中后面的三个点。）

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

上面的式子表明，至少在理论上，π 的值可以通过重复进行加法、乘法、除法、2 的平方根等算术运算而计算得到。然而，我们应该注意到，因为上面式子的收敛速度很慢，因此韦达计算 π 值的乘积公式没有太大的实际价值。

韦达的这个乘积的推导本质上与阿基米德一样，在一个单位圆内作有更多边的内接正多边形。但是，在两方面他又与其前辈不同：韦达不考虑圆周，而是求内接多边形的面积；其次，他以正方形而不是六边形开始。在给出他的推导之前，我们需要建立一个三角等式，即余弦函数的半角公式。在做这一工作的过程中，我们仍会看到毕达哥拉斯定理在三角学中的核心作用。

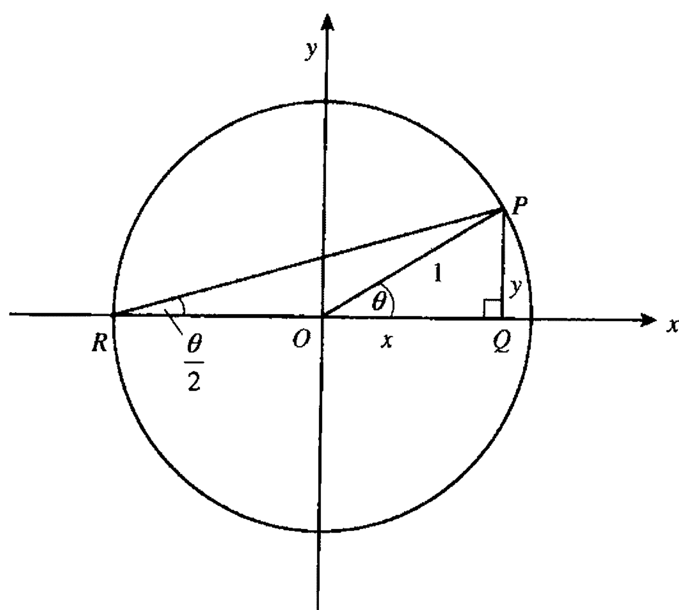


图 6-1　半角公式的推导

图 6-1 给出一个圆心在直角坐标系原点的单位圆。设 P 是圆上一点且设半径向量 OP 与 x 轴正向的夹角为 θ。在三角形 OPQ 中，我们有 $\cos\theta$

$=x, \sin\theta=y$。根据著名定理（欧几里得III，20），圆周角 QRP 等于同一条弦上的圆心角的一半；即 $\angle QRP=1/2\angle QOP=\theta/2$。于是在直角三角形 RPQ 中，我们有

$$\cos\theta/2=\frac{邻边}{斜边}=\frac{RQ}{RP}$$
$$=\frac{RO+OQ}{RP}=\frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}}$$

平方根中的表达式可以如下简化：$(1+x)^2+y^2=(1+2x+x^2)+y^2=1+2x+(x^2+y^2)=1+2x+1=2+2x=2(1+x)$。把这个结果带到上面的表达式中，我们得到

$$\cos\theta/2=\frac{1+x}{\sqrt{2(1+x)}}$$

把上式中的分母中的根式去掉，上式就变成

$$\cos\theta/2=\sqrt{\frac{1+x}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

这就是余弦的半角公式（注意在证明它的时候，我们两次使用了毕达哥拉斯定理）。利用这个公式以及它的配对正弦公式 $\sin\theta/2=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$，我们可以得到一系列相关公式，其中有正弦的倍角公式，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$。[3]

现在，我们已经做好了证明韦达乘积的准备。在图6-2中，AB 代表圆心为 O 的单位圆的内接正 n 边形的一条边。设 OC 是 AB 的垂直平分线，并设它的延长线与圆交于 D；因此，AD 和 BD 是正 $2n$ 边形的边。设 $\angle AOB=\alpha$，于是 $\angle AOC=\alpha/2$。韦达把这个正 $2n$ 边形的面积 $A(2n)$ 用正 n 边形的面积 $A(n)$ 来表示。我们有

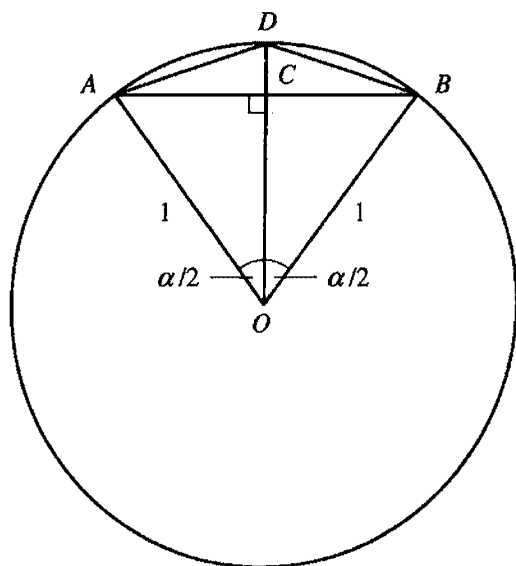


图 6-2　韦达乘积的推导

$$A(n)=n\times\text{面积}\Delta AOB=n\times2\times\text{面积}\Delta AOC$$
$$=2n\times(AC\times OC)/2=n\times AC\times OC$$

但是，在直角三角形 AOC 中，我们有 $AC=OA\times\sin\alpha/2=1\times\sin\alpha/2$，且 $OC=OA\times\cos\alpha/2=1\times\cos\alpha/2$，所以

$$A(n)=n\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \tag{1}$$

为了求 $A(2n)$，我们在公式(1)中用 $2n$ 取代 n，用 α 取代$\alpha/2$：

$$\begin{aligned}A(2n)&=2n\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\\&=n\sin\frac{\alpha}{2}\end{aligned} \tag{2}$$

其中，我们使用了正弦的倍角公式。结合公式(1)和(2)，我们有

$$A(2n)=\frac{A(n)}{\cos\alpha/2} \tag{3}$$

这个公式说明边数每增加一倍，内接正多边形的面积就增加 $1/\cos\alpha/2$ 倍。

我们可以把公式(3)变成下面的样子：

$$A(n)=A(2n)\cos\alpha/2$$

并反复把边的数量增倍后，重复使用这个公式：

$$\begin{aligned}A(n)&=A(2n)\cos\alpha/2\\&=A(4n)\cos\alpha/4\cdot\cos\alpha/2\\&=A(8n)\cos\alpha/8\cdot\cos\alpha/4\cdot\cos\alpha/2\\&\cdots\\&=A(2^k n)\cos\alpha/2\cdot\cos\alpha/4\cdots\cos\alpha/2^k\end{aligned}\tag{4}$$

在上面推导的最后一步，我们从 $\cos\alpha/2$ 开始反过来写这一系列余弦。

然后，韦达从内接正方形开始执行这个过程，当 $n=4$ 时，$A(4)=(\sqrt{2})^2$，且 $\alpha=360°/4=90°$。从 $\cos\alpha/2=\cos45°=\sqrt{2}/2=\sqrt{1/2}$ 开始，重复使用半角公式得到结果 $\cos\alpha/4=\sqrt{\dfrac{1+1/\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}$，$\cos\alpha/8=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}$，依此类推。把上面的结果都带回到方程(4)，我们得到

$$2=A(2^k\cdot4)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdots\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\tag{5}$$

上面公式的最后一项有 k 重根号。

在此，我们让边数 k 无限增大，即 $k\to\infty$。于是，内接多边形变得与圆无法区分，它的面积就是π。于是，方程(5)变成

$$2=\pi\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdots$$

把上面的式子两边除以 π 后，它就是韦达乘积。有趣的是，韦达把 2/π看成是面积比率，即正方形的面积与其外接圆的面积的比。而今天，我们是把 2/π 看成是直线量的比（圆的直径与圆周比的两倍）。

韦达乘积被认为是 π 的第一个真正的分析表示。在他的时代，对 π

的表示的所有努力都是文字描述的“如此这般”的说明。当然，阿基米德已经知道，为了求 π 的值，内接和外接多边形的边数必须无限地成倍增加，但是他小心地回避了对无穷的直接引用，而是说这个过程可以按需求重复多次，直到到达理想的精确度。正是韦达，他有这样的胆识在他的公式的末尾使用“等等”来直面无限。[4]

即使在今天，在韦达乘积发现的 400 年后，人们仍然认为韦达乘积是最完美的数学公式之一。可惜的是，在今天的教材中，这一公式几乎仍是关于他的研究的唯一话题。但是，当你赞美韦达乘积中 2 的平方根的节奏性出现时，请记住，它们是毕达哥拉斯定理的遥远幽灵。

注释和参考文献

[1] W. W. Rouse Ball, A *Short Account of the History of Mathematics* (Dover, 1960), p.230。

[2] 关于韦达的生平的更多详细记载，请参阅《三角之美》，pp.56-62。

[3] 为了证明这一点，把两个半角公式乘到一起：

$$\sin\theta/2\cdot\cos\theta/2=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{4}}=\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{4}}=\frac{\sin\theta}{2}$$

把上面的等式的两边乘以 2，用 θ 代替 $\theta/2$，我们得到要求的公式。（注意，在区间 $0°\leqslant\theta\leqslant360°$ 内，$\sin\theta/2$ 总是非负的，而 $\cos\theta/2$ 和 $\sin\theta$ 同号。因此，我们可以把最后的方程的每一边都写成正号。）

[4] 我们应该提的是，韦达乘积可以由欧拉发现的不为人知的三角等式更容易地得到：

$$\frac{\sin x}{x}=\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots$$

这个等式对所有 x 都收敛。设 $x=\pi/2$ 并重复使用余弦的半角公式，我们马上就可以得到韦达乘积。参阅我的文章“A Remarkable Trigonometric Identity”，《数学教师》，1977 年 5 月刊，pp.452-455。

第7章

从无穷大到无穷小

> 流数法（微分）是帮助现代数学家揭开几何秘密的通用钥匙……它在发现定理和解决问题中发挥着巨大的威力，使得我们比古人走得更远。
>
> ——乔治·贝克莱，《分析学家》(1734)

1666 年到 1676 年是数学史中极其重要的十年。英国的牛顿和当时正在巴黎访问的莱布尼茨分别在英吉利海峡两岸独立地展开研究，他们的新发明——微分和积分即将完成，数学史中这一最重要的事件发生在自欧几里得撰写《几何原本》之后的大约 2000 年。

曾是物理学家的牛顿是以力学术语来描述微积分的。他把变量考虑成处于连续运动状态的一种流体，称其为流量，而把函数考虑成两个流量间的关系，每一个流量都有自己的流速率。他定义函数的导数为两个关于时间的流量速度的比率，称其为流数。这个比率是衡量一个变量相对于另一个变量的变化比的尺度，也就是我们现在所说的导数。

莱布尼茨的兴趣广泛，他首先是一流的哲学家，因而采用了一种更抽象的方法。他把函数看成一个变量（如 x）到另一个变量（如 y）的等式关系，我们今天把这样的关系写成 $y = f(x)$。然后，莱布尼茨分别让 x 和 y 有一个微小的增量 dx 和 dy。这两个增量的比 dy/dx 是衡量 y 相对于 x 的变化速率的尺度。图 7-1 是个示意图，给出了函数 $y=f(x)$ 的图像和

图像上的一点 P。在点 P 画出这个图像的切线，并考虑切线上一个邻近点 T。这产生一个小三角形 PRT，莱布尼茨称其为特征三角形。当我们把点从 P 移向 T 时，这个三角形的边 PR 和 RT 分别是 x 坐标和 y 坐标上的增量，即 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$。莱布尼茨指出，如果这两个增量足够小，那么直线段 PT 将近似等于曲线段 PQ，即 P 和 T 之间的切线将在点 P 处与图像重合。因此，切线的斜率是衡量这个函数在点 P 处的变化速率的尺度。这个斜率就是 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$。今天，我们称这个比率——或更精确地说当 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 趋近于零时这个比率的极限——为函数 $f(x)$ 的导数，记作 $f'(x)$。

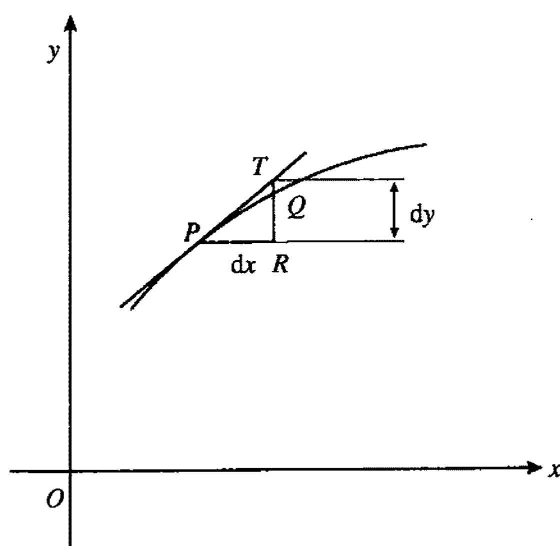


图 7-1　特征三角形

我们注意到，当 P 沿着图像移动时，特征三角形连续地变化，比率 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 也同时连续地变化；也就是说，函数的导数从一个点到另一个点改变它的值，因此导数本身也是 x 的函数（所以有记号 $f'(x)$ 和导数的名字，导数是导函数的简称）。求导数的过程称为微分。

莱布尼茨有时认为 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 是很小的量，但是是有限量；而有的时候他又认为它们是无限小，或无穷小量。今天我们称它们为微分。无论如何，莱布尼茨的记法使得他可以把量 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 当作两个普通量的比来研究

（即使它们无限小）。在这种意义下，微分的大部分运算规则就仅仅是微分的代数操作规则，这是第一学期微积分课程的主要内容。

莱布尼茨采用相同的方法解决了另一个问题，即求一个函数图像下面的面积。他又一次把 dx 当作 x 的极小增量。他把图像下面的面积分成很多狭长的垂直条，每一条的高度为 $y=f(x)$、宽为 dx（图 7-2）。于是，这样一个垂直条的面积是 $y\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$。对这些面积求和，莱布尼茨得到在点 $x=a$ 和 $x=b$ 间的这一函数图像下的总面积 A 的表达式。这个过程叫做积分，我们把它写成 $\mathrm{A}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，读做 $f(x)$从 a 到 b 的定积分。可以修改这个过程来求与这个函数相关的其他量，例如求当这个函数绕 x 轴旋转时所得到的几何体的表面积和体积。

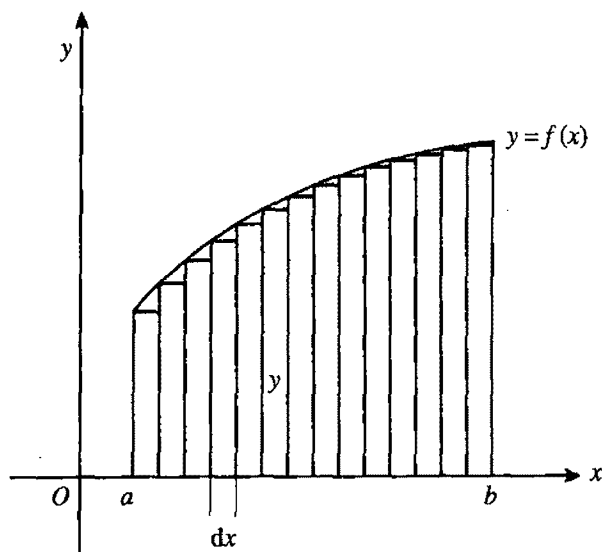


图 7-2　函数 $y=f(x)$的图像下的面积的近似

上面这两个问题是微分和积分的支柱，第一个问题是求函数图像上已知点的斜率，即变化比率；第二个问题求在给定区间上函数 $f(x)$的图像下的面积。乍看起来，这两个问题好像没有关系，但是，牛顿和莱布尼茨证明了它们实际上是互逆问题。具体说来，为了求 $f(x)$的图像下的

面积，我们必须首先求$f(x)$的不定积分，也就是导数是$f(x)$的函数$F(x)$。这样，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值是$F(x)$在$x=b$和$x=a$时的值的差。即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad 其中\ F'(x) = f(x)$$

（表达式 $F(b)-F(a)$通常写成$F(x)\Big|_a^b$）。这一互逆关系就是我们所知道的*微积分基本定理*。

牛顿和莱布尼茨采用了各自不同的方法形成了新微积分的运算法则，从而把微积分转化成为研究数学和其他科学分支的强大工具。但是他们的功绩却引发了丑陋的余波，之前的同事变成了激战的敌人，相互指责对方剽窃了自己的成果。这场激战在这两名主角去世之后仍就持续了很长时间，玷污了欧洲的科学氛围达一个世纪之久，遏制了英国在这一学科的几乎所有发展。今天，人们终于给牛顿和莱布尼茨以平等的评判，他们同为微积分的发明人。[1]



一旦这种新微积分的运算法则建立起来，解决很多领域中几个世纪以来悬而未决的问题之门就被打开。第一个问题是求两点间曲线长度的问题，这一过程被称为*求长*。自古以来人们一直认为曲线是不能求长的，也就是说无法使曲线的长度等于某个直线段的长度。即使是费马和帕斯卡也认同这一观点，而且先是求出某些曲线下的面积还不是它们的长度就已经让帕斯卡震惊不已。微积分的发明证明他错了。

当然，为了求两点(x_1, y_1)和(x_2, y_2)之间的直线段的长度，我们可以简单地使用距离公式$s=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。在这一公式里，我们用字母$s$取代通常表示距离的字母$d$，来避免与$\mathrm{d}x/\mathrm{d}x$中的d混淆。但是，对于所有其他曲线，我们必须采用“局部”方法。我们把函数$f(x)$的图像分成很多小直线段（图 7-3）。每一段都是边为$\mathrm{d}x$和$\mathrm{d}y$的特征三角形的

斜边。如果这个三角形足够小，我们可以把它的斜边看成这个图像的弧长 ds 的一个近似，即对于足够小的 dx 和 dy，我们有下面的近似方程

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \tag{1}$$

这个方程就是毕达哥拉斯定理的微分形式。

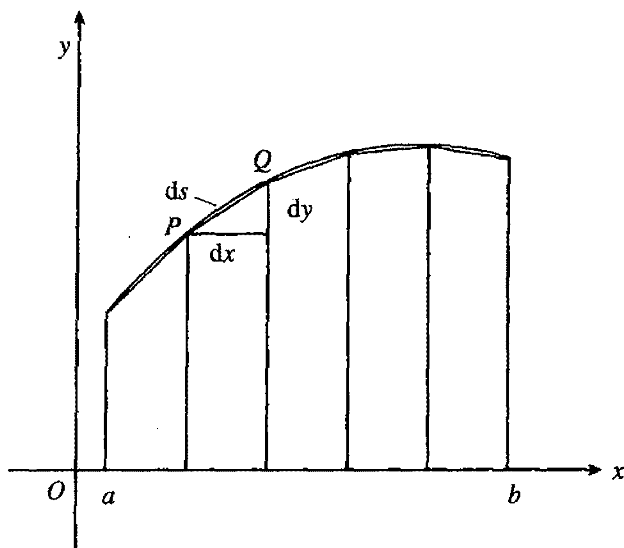


图 7-3　曲线求长

为了解这个方程求 ds，得 $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}\,\mathrm{d}x$。沿曲线的总弧长是所有 d$s$ 的“无限和”，即定积分

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

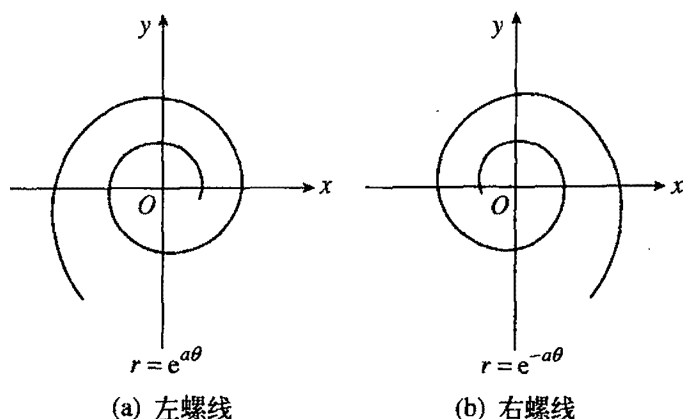
其中，$y = f(x)$是曲线的方程，$y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 是它的导数，而 a 和 b 是积分区间的端点。

假定方程(2)的积分存在（有有限值），那么理论上通过方程(2)，我们可以求得曲线方程 $y = f(x)$的曲线长度。然而，实际上，即使对简单的函数进行积分，其过程也常常相当复杂。举一个例子，假设我们求抛物线 $y = x^2$ 从 $x = 0$ 到 $x = a$ 之间的弧长。我们有 $y' = 2x$，所以 $s = \int_0^a \sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x$。这个看似简单的积分可能会使很多初学积分的学生望

而却步，它的结果是$\frac{1}{2}a\sqrt{1+4a^2}+\frac{1}{4}\ln(2a+\sqrt{1+4a^2})$，其中 ln 代表自然对数。



曲线求长给早期的微积分先驱们提出相当大的挑战，因为积分技术在当时才刚刚发明。最早要求长的是两种曲线：对数螺线和摆线，它们的方程通常是以非直角坐标的形式给出的。对数螺线因为频繁在艺术或自然中出现而闻名，鹦鹉螺贝壳呈现完美的对数螺线形状，向日葵种子的排列也如此。这种螺旋的方程是用极坐标表示的。在极坐标下，点 P 的位置是由它到原点 O（“极”）的距离 r 以及正坐标轴 x 与半径向量 OP 之间的夹角 θ确定的，而这个角就是逆时针方向的弧度。螺线的极坐标方程是 $r=e^{a\theta}$，其中，e 是自然对数的底（大约等于 2.718 28），而 a 是决定螺线增长速率的常量。如果 $a>0$，逆时针旋转角时，r 增大，于是产生一个左螺线（图 7-4a）；如果 $a<0$，则 r 减小，得到一个右螺线（图 7-4b）。当螺线向极内侧旋转时，它绕着它越来越近，但是永远不能到达极。因此我们可以想象，当意大利人托里拆利于 1645 年证明螺线上的任意一点到极的总距离有限时是如何的令人惊讶！



(a) 左螺线　　(b) 右螺线

图 7-4　两个螺线

托里拆利（1608—1647）是伽利略的门徒，也是他的临时助手，因发明了水银气压计而闻名于世。但是，如同他那个时代的大多数科学家一样，他的工作范围很广，其中就包括数学。他对各种曲线特别感兴趣，其中就有（马上就要讨论的）摆线和螺线。积分的发明还需要两年，所以，当托里拆利想要求螺线的长度时，他不得不使用迂回方法。他利用了螺线的特性：螺线的任意一部分，无论大还是小，看起来都与其他部分完全相像（今天，我们称这样的自相似曲线为分形）。这意味着，如果我们把半径向量 OP 以等量旋转，那么长度 r 也等比例地增大，它满足等比级数。所以，托里拆利把螺线分成有等角宽 $d\theta$ 的很多狭小的扇形。每一个小扇形形成一个边长为 dr 和 $rd\theta$ 的特征三角形，如图 7-5 所示。如果这个三角形足够小，那么我们可以用线段 PQ 取代弧 ds（即图中的弧 PQ）。于是根据毕达哥拉斯定理，我们有

$$ds=\sqrt{(dr)^2+(rd\theta)^2}=\sqrt{r^2+(dr/d\theta)^2}\,d\theta \qquad (3)$$

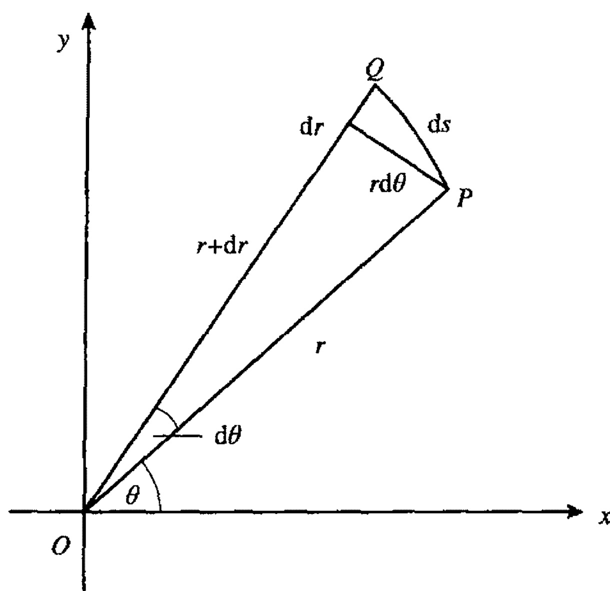


图 7-5　极坐标下的弧长元

对这些弧长元求和并使用上面所提到的螺线特性，托里拆利发现从 P 到极 O 的总弧长等于螺线在 P 点处的切线从 P 到 y 轴之间的那段长度（图 7-6）。这是首次对超越曲线（非代数曲线）的求长，附录 F 中给出一个证明。[2]

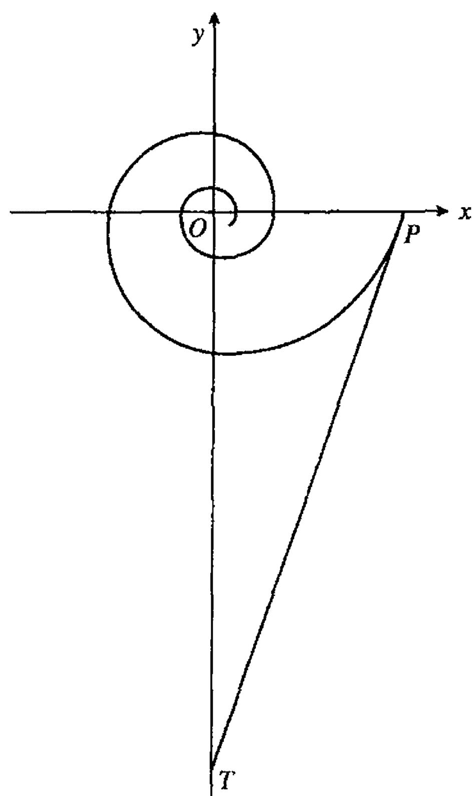


图 7-6　对数螺线的求长



摆线是当一个轮子沿直线无滑动地滚进时，其边缘上的一个点形成的曲线。利用一对参数方程可以最简洁地表示它。设 a 是生成圆的半径，$P(x,y)$是圆周上的一个点，θ是圆已经旋转过的角度，即从点 P 接触 x 轴那点开始按顺时针方向 P 扫过的弧度（图 7-7）。当这个生成圆在 x 轴上滚动时，点 P 沿着圆周描述一段长度为 $a\theta$ 的弧，而且这段弧被转化为

沿 x 轴的直线运动。因此，点 P 的 x 坐标是 $a\theta-a\sin\theta=a(\theta-\sin\theta)$，$y$ 坐标是 $a-a\cos\theta=a(1-\cos\theta)$：

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta) \tag{4}$$

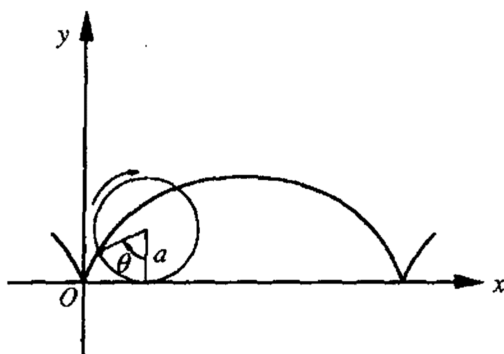


图 7-7　摆线

与对数螺线一样，摆线也有很多有趣的性质。例如，如果把这个曲线倒过来，那么这个曲线就变成这样一种曲线：在重力作用下粒子沿着它将在最小可能的时间内滑下（而且沿着这条曲线粒子将以常量周期振动，与振幅无关）。因此，毫不奇怪为什么 17 世纪和 18 世纪的很多数学家都研究这种曲线，其中就有伽利略、笛卡儿、托里拆利、惠更斯和伯努利兄弟等人。托里拆利首先发表了摆线的一个拱形的面积是 $3\pi a^2$ 的证明，也就是生成圆面积的 3 倍（法国人吉尔斯 · 罗伯瓦尔比他早了几年，但是他没能发表这一结果，因此触发了两人之间关于优先权的激烈争论）。但是，这个曲线的长度的第一发现人是英国著名建筑师克里斯多弗 · 雷恩（1632—1723）。

雷恩的名字之所以至今被人们记得，主要是因为 1666 年那场大火后重建伦敦的工作。这是一项十分艰巨的任务，其辉煌成就是建成宏伟的圣保罗大教堂。然而，雷恩还是一名数学家，他担任牛津大学天文学萨维尔教授一职。他的一个发现至今仍令初次学习它的学生们感到震惊，

这一发现是双曲面的鞍形表面（当双曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 y 旋转时生成的表面）可以由两组直线构建而得，其中，每一组直线中的每一条直线都与另外一组直线中的每一条直线相交，而同一组的直线互不相交（图 7-8）。他发明的摆线求长法可以追溯到 1658 年：他发现每一个拱形弧的长度正好是 $8a$（附录F给出证明）。令人奇怪的是，这个结果与π无关。[3]

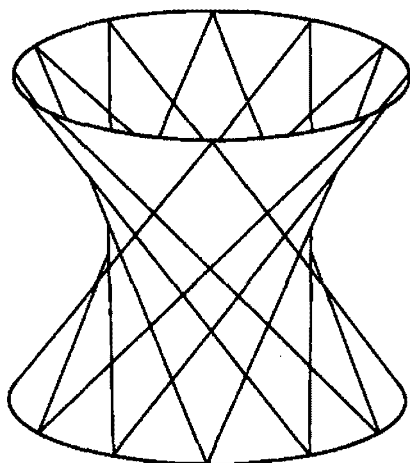


图 7-8 旋转的双曲面

我们再考虑两种曲线：星形线和悬链线，对它们的求长要相对容易一些。星形线是这样生成的：当单位长的棒的端点在 x 轴和 y 轴上滑动时，它能占据的所有可能位置（图 7-9）。它的隐式方程是 $x^{2/3}+y^{2/3}=1$，

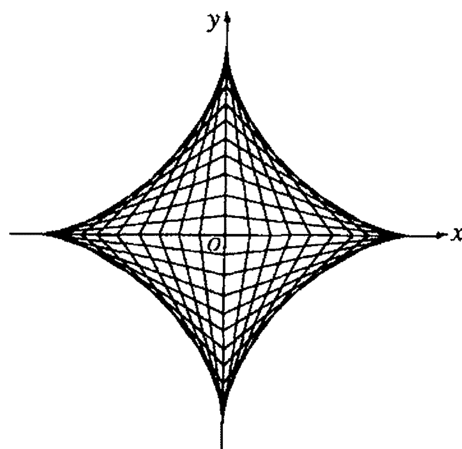


图 7-9 星形线

对这个方程求 y，我们可以得到一个显式的方程 $y=(1-x^{2/3})^{3/2}$。从这个方程，我们可以求 y'，并把它代入到公式 $s=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx$ 中。计算这个积分，我们发现四分之一星形线的长度是 3/2，即是生成棒的长度的 3/2 倍（详细内容参阅附录 F）。我们将在第 10 章再次遇到星形线。[4]

悬链线是由一个密度均匀的链在重力作用下在两个固定点间自由下垂而形成的。悬链线（图 7-10）的形状问题在 17 世纪的数学家中引起激烈的争论。伽利略则认为悬链线是抛物线，应该说它的确很像。但是 1691 年，为响应雅格布 · 伯努利的挑战，三位数学家分别独立地给出了正确的答案，他们是雅格布 · 伯努利、他的弟弟约翰 · 伯努利和莱布尼茨。这个曲线实际遵守这样的方程：$y=(e^x+e^{-x})/2$，其中 e 是自然对数的底。而表达式 $e^x+e^{-x}/2$ 被称为 x 的双曲余弦函数，写成 $\cosh x$；类似地，x 的双曲正弦函数是$(e^x-e^{-x})/2$，写成 $\sinh x$。悬链线的方程可以写成 $y=\cosh x$。

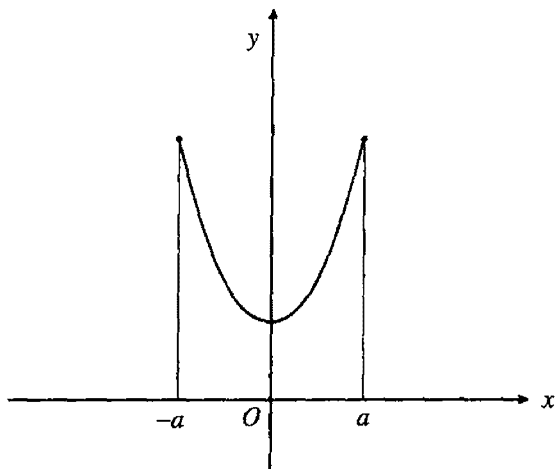


图 7-10　悬链线

为了求悬链线的弧长，我们利用双曲余弦函数与圆函数（三角函数）$\sin x$ 及 $\cos x$ 之间特定形式相似性。例如，对应于毕达哥拉斯定理的三角

函数形式的等式 $\cos^2x + \sin^2x = 1$，我们有双曲余弦函数的等式 $\cosh^2x - \sinh^2x = 1$（注意，此时第二项的符号是负的）。[5]这些函数的导数之间也非常相像。我们有$(\sin x)' = \cos x$，$(\cos x)' = -\sin x$；类似地，双曲公式是$(\sinh x)' = \cosh x$，$(\cosh x)' = \sinh x$（两项都是正的）。

这些特性使得悬链线的求长变得相当简单。从 $y = \cosh x$ 开始，我们有 $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \sqrt{\cosh^2 x} = \cosh x$。把这个公式代入到方程(2)中，我们发现悬链线在点 $x = -a$ 和 $x = a$ 之间（这两点关于曲线的最低点是对称的）的长度是 $s = \int_{-a}^{a} \cosh x \, dx = \sinh x \Big|_{-a}^{a} = \sinh a - \sinh(-a) = 2\sinh a$，在这一过程中我们使用了 $\sinh x$ 为奇函数（即 $\sinh(-x) = -\sinh x$）的事实。有趣的是，$\int_{-a}^{a} \cosh x \, dx$ 还代表悬链线从 $x = -a$ 到 $x = a$ 的图像下的面积，所以从数值上，悬链线的这段弧长等于它之下的面积。[6]

由此，你也许会认为，求三角余弦函数的长度也应该同样容易，但实际上并非如此。采用类似的步骤，但使用 $y = \cos x$，我们只能给出表达式 $\sqrt{1+\sin^2 x}$，而它的不定积分无法用初等函数表示。[7]其原因应该归结于三角方程 $\cos^2x + \sin^2x = 1$ 中的 + 号，它使得我们无法化简表达式 $1 + \sin^2x$。当然，我们可以通过数值积分找到 $\int \sqrt{1+\sin^2 x} dx$ 的近似值，例如求从 $x = 0$ 到 $x = \lambda$（$\cos x$ 的半个周期）时的近似值，利用 TI-83 图形计算器，我们可以算出其近似值为 3.82。但是，我们无法把结果写成封闭形式的分析表达式。



从欧几里得在《几何原本》中以命题 I-47 给出毕达哥拉斯定理开始，我们已经走过相当长的路程。首先，这一定理被考虑为直角三角形各边上构建的正方形的面积间的关系，然后逐渐进化成三个边的长度之间的关系，用于给定其中任意两个边求出第三个边。毕达哥拉斯不可能想象

得到，有一天可以利用他的定理去求几乎所有曲线的长度，而我们只要知道它的方程即可。[8]对此，我们不得不感谢这个被希腊人顽固地拒之门外的非凡的思想——无穷的思想。[9]

注释和参考文献

[1] 无需说，这一点点篇幅即使作为对微分这一课题的粗略介绍也仍然是不充分的。关于更详细的概括，请参阅《e 的故事》第 8 章和第 9 章。

[2] 关于对数螺线及其在艺术与自然中的角色的更多内容，可以参阅 Theodore Andrea Cook, *The Curves of Life: Being an Account of Spiral Formations and Their Application to Growth in Nature,to Science and to Art* (Dover, 1979); Matila Ghyka, *The Geometry of Art and Life* (Dover, 1977); Jay Hambidge, *The Elements of Dynamic Symmetry* (Dover, 1967); D'Arcy W.Thompson, *On Growth and Form*（剑桥大学出版社, 1961）以及 *TO Infinity and Beyond*，第 11 及第 12 章。

[3] 有关摆线的更多内容，请参阅 Robert C.Yates, *Curves and Their Properties*（全美数学教师学会，1974），pp.65-70。

[4] 有关星形线的更多内容，参阅同上，pp.1-3。

[5] 正是根据这个等式我们得到了“双曲线函数”一词。因为，如果我们写 $x = \cosh t, y = \sinh t$，其中t是参数，那么很容易证明$x^2 - y^2 = 1$，这表明点（x,y）在双曲线$x^2 - y^2 = 1$ 上。这就与方程组$x = \cos t$，$y = \sin t$类似，它的对应点（x,y）在单位圆$x^2 + y^2 = 1$ 上（于是就有“圆方程”一词）。

[6] 有关悬链线的更多内容，请参阅 Yates, *Cures*, pp.12-14 和《e 的故事》第 12 章。

[7] 初等函数包括幂函数、多项式函数、分式函数、指数函数、三角函数、双曲线函数和它们的逆函数，以及通过加、减、乘、除、乘方和开方而得的这些函数的任意有限组合。

[8] 我说“几乎”是因为的确存在“病态”曲线，它们的弧长没有有限值（即使在这个区间内函数是完全有定义的）。例如，考虑函数$f(x) = x\sin 1/x$，它的图像在直线$y = \pm x$ 间振荡。这个函数在 $x = 0$ 无定义，但是我们可以令$f(0) = 0$，于是得到一个对所有 x 都连续的函数。当 $x \to 0$ 时，振荡的频率无限制地增大。其结果就是，这个图像从 $x = 0$ 到其他任意点间的弧长都是无限的。

[9] 有关更多求长的早期历史，请参阅 Margaret E.Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus* (Dover, 1987), pp.223-228。

补充3　欧拉的一个非同凡响的公式

> 欧拉没有费吹灰之力就将它计算出来了，就如同人们呼吸，如同雄鹰在空中飞翔。
>
> ——弗朗索瓦·阿拉果（1786—1853）

1734年，瑞士数学家欧拉（1707—1783）解决了他那个时代的一个重要难题：求无限序列 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots$ 的和。1689年，雅格布·伯努利已经证明了这个序列收敛，但是还没有人能够给出其精确的和，很多数学家做了尝试，但都以失败告终，其中包括伯努利兄弟——约翰和雅格布。欧拉使用的方法即使是今天初学微积分的学生也不见得能够接受，因此，当他声明这个和是 $\pi^2/6$（约为1.644 93）时，就如同掷出了一枚炸弹。他的方法存在不足之处，但他侥幸地找到了正确的和。[1]

欧拉的发现的确非同凡响，因为在一个只包含自然数的序列中却出乎意料地出现了π。[2]另外，因为这个和是由平方和组成的，因此令人不禁提出这样的疑问：它是否与毕达哥拉斯定理有什么瓜葛。事实的确如此。在图S3-1中，设 $r_1=OP_1$ 为沿 x 轴从0到1的线段。在点 P_1 做垂线 P_1P_2 垂直于 x 轴，且其长度是1/2。从 O 到 P_2 的半径向量的长度为 $r_2=\sqrt{1+1/2^2}$。在点 P_2 作垂线 P_2P_3 垂直于 OP_2，且其长度为1/3。OP_3 的长度为 $r_3=\sqrt{1+1/2^2+1/3^2}$。用同样的方式继续 n 次，我们到达点 P_n，它到 O 点的距离 $r_n=\sqrt{1+1/2^2+1/3^2+\cdots+1/n^2}$。随着 n 的递增，平方根下面的和缓慢递增，当 $n\to\infty$ 时它趋近于 $\pi^2/6$。因此，P_n 缓慢地向外旋转，渐渐逼近半径为 $r_\infty=\pi/\sqrt{6}\sim1.28255$ 的极限圆。同时，线段 OP_1、P_1P_2、…、$P_{n-1}P_n$ 的长度和趋近于无穷，因为调和序列 $1+1/2+1/3+\cdots$ 是发散的。

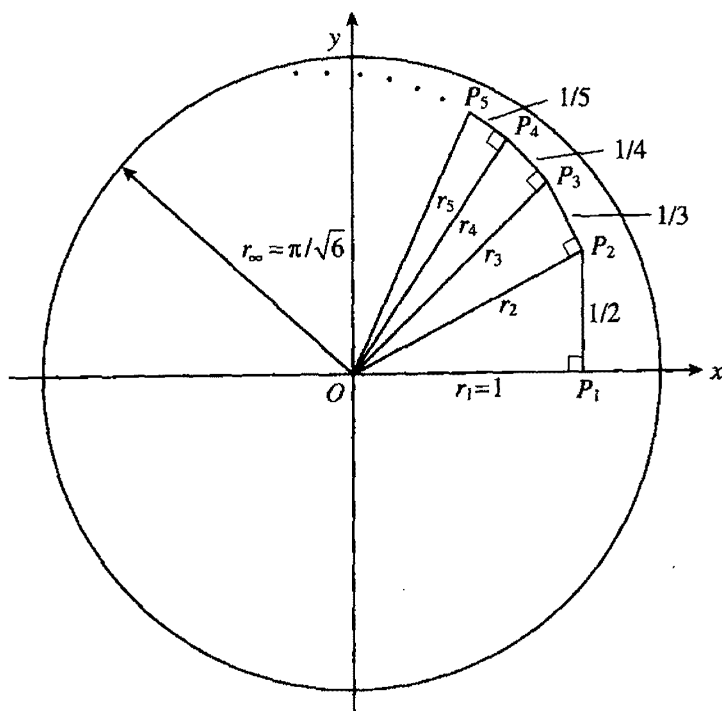


图 S3-1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的序列的几何表示

注意，只要 n 是有限的，我们就可以用圆规和直尺来执行这一过程，因为涉及的每一步都可以用这些工具构造出来。[3]因此理论上，我们可以利用这一过程作图估测出 π 的值。然而，在你尝试这样做之前，要知道这将是一个相当漫长而乏味的过程，因为欧拉序列的收敛速度非常慢：为了求 π 到小数点后两位，需要 628 项。

欧拉没有止步于序列 $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots$。利用类似的方法，他还成功地计算了序列 $1 + 1/2^k + 1/3^k + \cdots$的和，其中 k 是 2~26 的所有偶数；对于最后的 k 值，他找到的和是

$$\frac{2^{24}\times 76\,977\,927\times\pi^{26}}{1\times 2\times 3\times\cdots\times 27}$$

然而，对于同一个序列，当 k 是奇数时，求和则相当困难，就在不久之前我们还不知道 $k = 3$ 时和的性质。[4]

注释和参考文献

[1] 本质上，欧拉是把普通有限代数的法则运用于无限序列（特别是 $\sin x$ 的幂序列；参见补充 6）这种方法不总是可行的，而且可能产生可笑的结果，但是对于上面这个序列，欧拉得到了正确的答案。至于他是如何得到的，请参阅 William Dunham, *Journey through Genius: The Great Theorems of Mathematics* (John Wiley, 1990)第 9 章。还可以参考《三角之美》，pp.156-161。

[2] 然而，这不是被发现的第一个这样的序列。1671 年，詹姆斯·格列高利（1638—1675）使用刚刚发明不久的积分证明了 $1-1/3+1/5-1/7+-\cdots$ 收敛于 $\pi/4$。1674 年，莱布尼茨也独立地发现了这一序列，因此称其为格列高利–莱布尼茨序列。

[3] 为了构造 $1/n$，沿 x 轴做长度为 n 的线段 OP（图 S3-2）。以 OP 为直径做圆，设这个圆与单位圆相交于点 T。从点 T 做 x 轴的垂线，垂足为 Q。根据一个著名的定理（欧几里得Ⅲ，20），$\angle OTP$ 是直角。因此，三角形 OQT 与 OTP 相似，所以 $OQ/OT=OT/OP$。但是 $OT=1$，所以 $OQ=1/OP=1/n$。

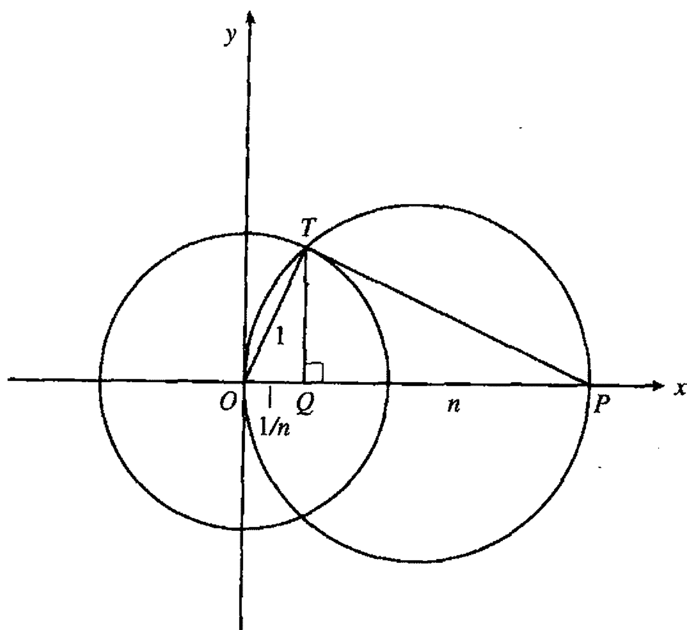


图 S3-2　$1/n$ 的构造

[4] 然而，我们知道序列 $1+1/2^k+1/3^k+\cdots$ 对所有 $k>1$ 收敛，而对所有 $k\leqslant 1$ 发散（$k=1$ 时是调和级数）。对于 $k=3$ 的情况，参考 Alfred Van Poorten，

"A Proof That Euler Missed…—Apéry's Proof of the Irrationality of $\zeta(3)$", *Mathematical Intelligencer*, 1(1979), pp.195-203。1978年，Apéry证明了这个序列的和约等于1.202。

当把序列 $1 + 1/2^k + 1/3^k + \cdots$ 看成是幂 k 的函数时（其中 k 可以取复数），它就是著名的Zeta函数，并记为 $\zeta(k)$。这是数学中一个引人入胜的课题，因为黎曼假设说这个Zeta函数的所有复数零都位于复平面的垂线 $x = 1/2$ 上。尽管人们投入了极大的努力，但是这个猜测至今没有得到证明。参见John Derbyshire著的 *Prime Obsessions:Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics* (Joseph Henry Press, 2003)和Dan Rockmore著的 *Stalking the Riemann Hypothesis: The Quest to Find the Hidden Law of Prime Numbers*(Pantheon Books, 2005)。

第8章

371种证明及其他

> 毕达哥拉斯定理被认为是欧几里得的所有定理中最具魅力的定理，对它有兴趣的人来自不同阶层、不同国家，无论是坐在椅子中的老哲学家，还是荒野中战壕里的年轻士兵，都在1917年为寻找它的新证法而耗去时光。
>
> ——爱丽莎·斯科特·卢米斯《毕达哥拉斯命题》

卢米斯（1825—1940）在数学圈子里并不是一个家喻户晓的人物，据我所知没有什么方程或定理是以他的名字命名的，也很少有什么他写的著作至今被人们说起。而285页的《毕达哥拉斯命题》这一本著作除外，[1]在这本著作中他收集、归纳了毕达哥拉斯定理的371种证明。

正如卢米斯的一本著作的前言中所描述的那样，他是一名“哲学家、数学家、作家、家谱专家和土木工程师，[但是]比其他任何头衔都值得赞誉的是‘教师’，正是在他做教师的50年间，他竭尽全力对与他接触的人产生了深刻的影响。”[2]他出生于美国俄亥俄州梅迪纳县，是8个孩子中的老大，约瑟夫·卢米斯家族的第17代，这个家族于1639年从英格兰移民到美国。他们家族成员中有几位是军官，有一位是数学家伊莱亚斯·卢米斯（1811—1899）。卢米斯12岁的时候失去了父亲，于是他想去工作以补贴家庭。他是一名勤奋的学生，并且很早就显现出对数学的热爱。有一次他步行7英里来到附近的一个城镇购买代数课本，他想自

己学习这本书，因为学校里没有老师能够指导他。1880 年，他得到鲍德温大学理学学士学位，1886 年取得数学硕士学位，两年后取得了博士学位。有一段时间，他担任了鲍德温大学数学系系主任，但是他真正想做的还是教书。离开高校这一学术职位，他成为克利夫兰西部高中的数学学科组长，并在这一职位上一干就是 20 年。这 20 年来他继续学习，1900 年获得了克利夫兰法律学校的法律学位，这一学位使他得以在俄亥俄州律师事务所任职。但到此并没有结束，他进而学习了土木工程，并担任了克利夫兰郊区的伯里亚村的市政工程师。

卢米斯还是一位多产的作家。他写了一百多篇文章，并出版了几本著作，这些文章和著作涉及的范围很广，包括几何、道德规范、哲学和宗教等教学的话题。他还是一位家谱记录人，耐心地收寻约瑟夫·卢米斯家族祖先的行踪，最终修订了他的堂兄、数学家伊莱亚斯·卢米斯于 1875 年首次出版的 859 页的《约瑟夫·卢米斯家族在美国的后代和他在古老世界的祖先》（1908）一书。经他的修改，书中列出了 32 000 多个名字。甚至在 1934 年，卢米斯还写了自己的讣告，并配有在他的葬礼上如何宣读的说明。人们按这封信实现了他的愿望，“除了他的死亡日期和他的亲人的陈述”。他以第三人的身份讲述自己，说：“他在作为教师的 50 年间，在培养 4 000 多名处于可塑期的男孩、女孩和青年男女的行为习惯上尽心尽力。”[3]

但是，卢米斯认为编写于 1907 年而直到 1927 年才出版的《毕达哥拉斯命题》是他最好的著作。1940 年他对其做了修改，这是他去世的那一年。在这本著作的附录，卢米斯给出了他后来看到的若干证明，说是“自 1939 年 6 月 23 日完成第 2 版的第 257 页以来，它们来自各方。”他的著作的签名是“E. S. Loomis 博士，1940 年 5 月 1 日，年近 88 岁。”1968 年，全美数学教师委员会重印了这本著作，它是经典系列“传世之

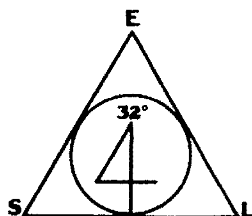
作”（引自于出版商）在数学教育领域中的第一本。

《毕达哥拉斯命题》一书的确能反映其作者的特有性格。全书散落穿插着12幅名人的肖像，诸如欧几里得、哥白尼、笛卡儿、伽利略和牛顿等，当然还有毕达哥拉斯本人。但是，本书的卷首插图却是卢米斯本人的肖像，带有专制学校校长特有的严厉面孔，一副居高临下的模样（图8-1）。正文的第一页给出了一个神秘的三角形，三个顶点使用的字母是E，S，L，这显然是作者名字的字头，另外还有一个高深莫测的数字4，其上方有个题字“32°”（图8-2）。紧接其下是冗长的毕达哥拉斯传记，如同所有传记一样，我们必须用充满怀疑的眼光去阅读。卢米斯评论说，在中世纪，数学专业学生被要求能够给出毕达哥拉斯定理新的原创证明。卢米斯相信，这是人们提出大量证明的一个原因。至于毕达哥拉斯自己的证明，卢米斯说：“无人得知这一著名定理的证明是否为原创，但是，现在我们知道印度的几何学家在毕达哥拉斯的几个世纪之前就已经知道这个定理了，毕达哥拉斯是否知道他们已经知道这个定理同样也不得而知。但是，在古代诸多的大师中，是他奠定了毕达哥拉斯定理在欧几里得几何学中令人尊敬的地位。”



图8-1 卢米斯

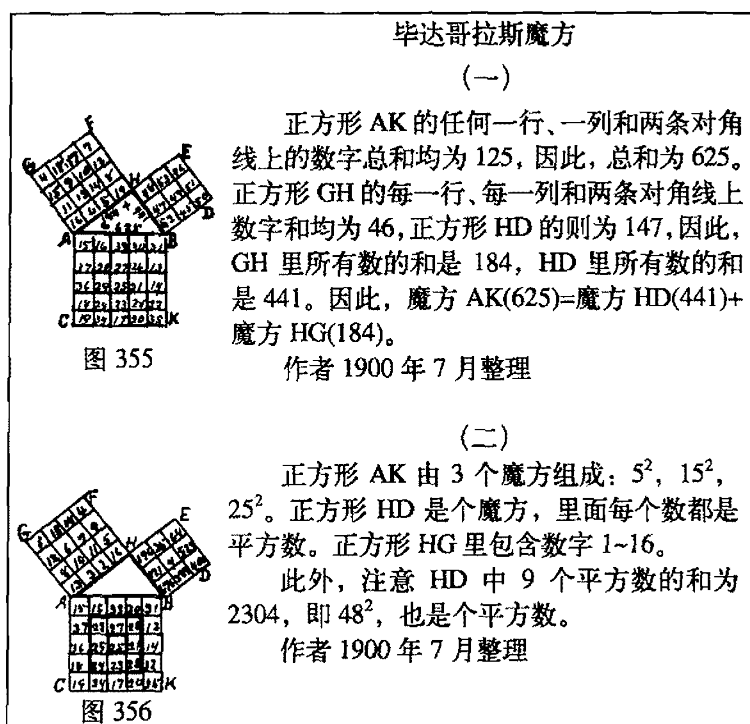
ὁμιλεῖν τῷ Θεῷ



GOD GEOMETRIZES CONTINUALLY~*PLATO.*

图8-2 《毕达哥拉斯命题》的第一页

卢米斯把 371 个证明分成两大类：代数证明和几何证明。对于后者他又根据操作原理划分成了两小类："向量证明"和"动态证明"。他对"代数"和"几何"的区分有时不是很明确，似乎是根据其是证明 $c^2=a^2+b^2$（他认为 $c^2=a^2+b^2$ 是纯代数表达式），还是按毕达哥拉斯的理解，把斜边上正方形面积与其他两边上的正方形面积作比较来定的。109 个代数证明又进一步被分成 7 个小组，而 256 个几何证明又根据多种标准分成了 10 个小组。这本著作还附加了"毕达哥拉斯的珍品"（参看补充 7）和 5 个毕达哥拉斯魔方，这里我们给出其中的两个（图 8-3）。



毕达哥拉斯魔方

（一）

正方形 AK 的任何一行、一列和两条对角线上的数字总和均为 125，因此，总和为 625。正方形 GH 的每一行、每一列和两条对角线上数字和均为 46，正方形 HD 的则为 147，因此，GH 里所有数的和是 184，HD 里所有数的和是 441。因此，魔方 AK(625)=魔方 HD(441)+魔方 HG(184)。

作者 1900 年 7 月整理

图 355

（二）

正方形 AK 由 3 个魔方组成：5^2，15^2，25^2。正方形 HD 是个魔方，里面每个数都是平方数。正方形 HG 里包含数字 1~16。

此外，注意 HD 中 9 个平方数的和为 2304，即 48^2，也是个平方数。

作者 1900 年 7 月整理

图 356

图 8-3　《毕达哥拉斯命题》一书中的两个魔方

理解所有这些证明中的一部分能够检验一个人的耐心极限，所有这些都鉴于卢米斯的简洁风格。还必须说的是，许多证明彼此之间只是细节上的不同。然而，如果你耐心地挖掘其中的奥秘，一定能找到珍宝。所有经典证明都在这里，另外还有一些是只有惠更斯、莱布尼茨等少数

大师才知道的证明。有一个证明是由盲人姑娘 E. A. 库丽琪给出的，大致是 1888 年；还有一个证明是由 16 岁女高中生安·康迪给出的。有一个提出证明的人后来成为美国总统，还有一个是列奥纳多·达·芬奇给出的证明。总之，这是在数学史声名显赫或没有名气的人物画廊。

下面的内容是卢米斯著作中的一些精彩片段，根据需要我会对他的证明做些改动使其更容易理解。

最短的证明　卢米斯用现代记法给出了欧几里得的第二个证明（VI-31；参阅第 3 章），但是这个证明应该归功于法国数学家勒让德（1752—1833）。另外，虽然他声明“这可能是最短的证明”，但是还有一个更短的证明，我将在补充 4 中给出。

最长的证明　因为太长所以不能在这里把完整的证明呈现出来，参见图 8-4。这一证明也是由勒让德给出的。

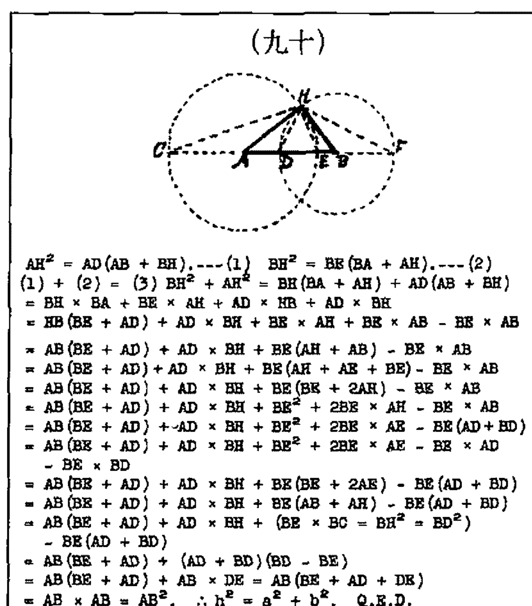


图 8-4 《毕达哥拉斯命题》一书中最长的证明

托勒密的证明　克劳迪·托勒密通常称为托勒密(约公元 85—165)，是继阿基米德之后古代最伟大的应用数学家，而且也最具影响力。他生活在亚历山大，但是与欧几里得一样，人们对于他的生平知之甚少（他与亚历山大大帝死亡之后统治埃及的托勒密王朝无关)。托勒密的著作主要是地理学和天文学。他最具影响力的著作是《至大论》(参见第 5 章)，这本著作是关于三角学和数学天文学的。这本书中有下面被称为托勒密定理的结果。

> 由内接于圆内的任意四边形对角线构成的矩形等于对边所构成的矩形之和。

为了理解这个神秘的陈述，我们必须再次记起希腊人认为两个数的积 $a \times b$ 是长度分别为 a 和 b 的矩形的面积。因此“内接于圆内的任意四边形的对角线所构成的矩形”的意思，是边为内接四边形对角线的矩形的面积，对于“一组对边构成的矩形”的解释也类似。总之，“由……构成的矩形”的意思就是“……的积”。于是，托勒密定理可以如此公式化：*内接于圆内的四边形内，对角线的积等于对边的积的和*。根据图 8-5，上面这句话意思就是

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times DA \tag{1}$$

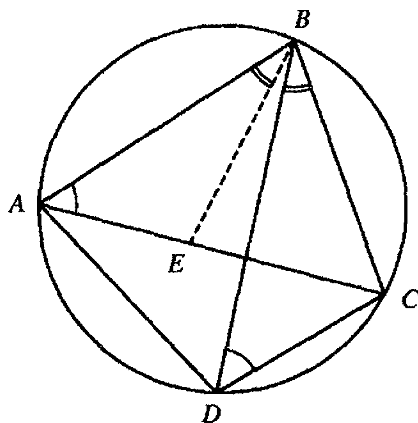


图 8-5　托勒密定理

（托勒密定理的）**证明** 利用一条边，比如边 AB 作为初始边，构造 $\angle ABE=\angle DBC$。因为有公共弦 BC，角 CAB 和角 CDB 也相等。有两组对角相等，三角形 ABE 和三角形 DBC 相似。因此，$AE/AB=DC/DB$，由此我们得到

$$AE \times DB = AB \times DC \tag{2}$$

如果我们在等式 $\angle ABE=\angle DBC$ 的两边同时加上 $\angle EBD$，那么我们得到 $\angle ABD=\angle EBC$。因为有公共弦 AB，角 BDA 和角 BCA 也是相等的。因此，三角形 ABD 和三角形 EBC 相似，所以有 $AD/DB=EC/CB$，所以

$$EC \times DB = AD \times CB \tag{3}$$

最后，把等式(2)和(3)加起来，我们得到 $(AE+EC)\times DB=AB\times DC+AD\times CB$。用 AC 取代 $AE+EC$，我们得到所求的结果（注意所有边都是无向线段，所以 $BD=DB$，其他同理）。[4]

如果我们设四边形 $ABCD$ 是矩形（图 8-6），那么毕达哥拉斯定理就是这个定理的特殊情况。此时四个顶点都是直角，而且 $AB=CD$，$BC=DA$，于是托勒密定理变成

$$AC^2=AB^2+BC^2$$

列奥纳多·达·芬奇的证明 从直角三角形 AKE（图 8-7）开始，分别在边 a、b 和斜边 c 上构建正方形 $EFGK$、$AKHI$ 和 $ABDE$。三角形 BCD 是把原来的三角形旋转 180° 得到的。现在我们有了六角形 $ABCDKE$，它被虚线 KC 分成两部分。连接 G 和 H，产生六角形 $AEFGHI$，它又被虚线 IF 分成两部分。（注意，三角形 AKE 和三角形 HKG 是关于线 IF 的镜像，因此点 I、K 和 F 在同一直线上。）

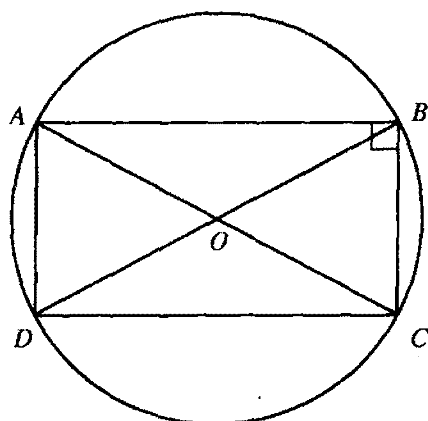


图 8-6　作为托勒密定理的特殊情况的毕达哥拉斯定理

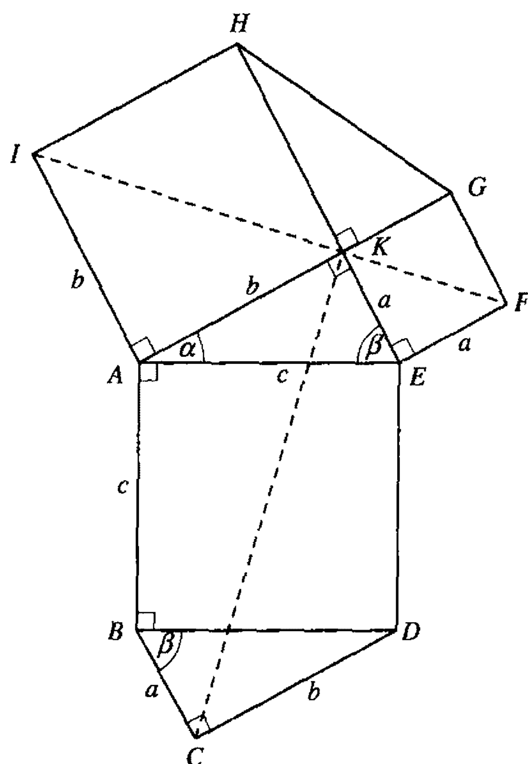


图 8-7　达芬奇的证明

我们认为四边形 $KABC$ 和 $IAEF$ 是全等的，因此有相等的面积。为了证明这一点，把 $KABC$ 关于点 A 逆时针旋转 90°。我们有 $\angle IAE = 90° + \alpha = \angle KAB$，且 $\angle ABC = 90° + \beta = \angle AEF$，因为边 AK 旋转到 AI，AB 旋转到 AE，BC 旋转到 EF，同时保存这些线之间的夹角。于是 $KABC$ 与 $IAEF$

重叠，从而它们的面积相等。(注意图中的两条虚线实际上长度相等，尽管在图中 KC 比 IF 长。)

这说明六角形 $ABCDEK$ 和 $AEFGHI$ 也有相等的面积。从前面的六角形中减去相等的两个三角形 AKE 和 DBC，从后者中减去全等三角形 AKE 和 HKG。于是，$ABDE = AKHI + KEFG$，即 $c^2 = a^2 + b^2$。

卢米斯根据 F. C. 布恩（《五花八门的数学》，1924）的权威性，认为这一证明是达芬奇（1452—1519）给出的。

詹姆斯·加菲尔德的证明 在图8-8中，延长 CB 到 D，使得 $BD = AC = b$，做 $DE = CB = a$ 且垂直于 BD。直角三角形 ACB 与 BDE 全等，它们有两组相等边。因此，角 ABC 和 EBD 互补，所以 ABE 是直角。现在，梯形 $ACDE$ 的面积为 $(AC + ED) \times CD/2 = (b + a) \times (a + b)/2 = (a + b)^2/2$。这还等于三角形 ABE 的面积加上三角形 ACB 的面积的两倍，即 $c^2/2 + 2(ab/2) = c^2/2 + ab$。用等号连接两个表达式，我们得到 $a^2 + b^2 = c^2$（同前面一样，所有线段都是无向的）。这一证明之所以出名，是因为它

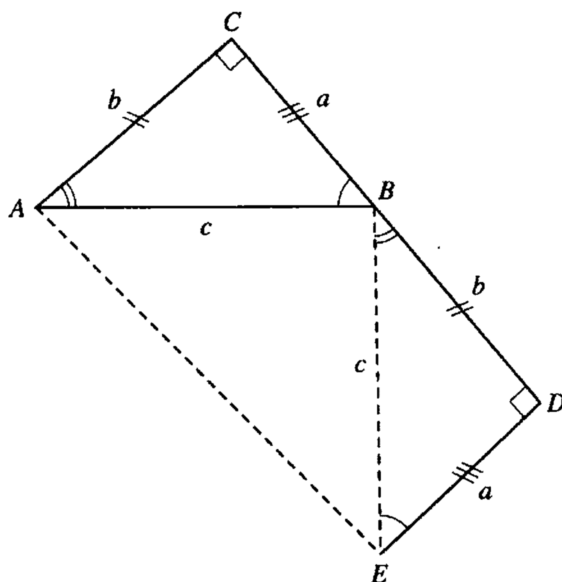


图8-8 詹姆斯·加菲尔德的证明

是由美国第20任的总统詹姆斯·加菲尔德（1831—1881）提出的。引用卢米斯的话说，这一证明“是这位长官在大约1876年时与其他国会议员进行的一次数学讨论中偶然发现的”。

安·康迪的证明 设直角三形是 ABC（图8-9）。作正方形 $ACDE$、$BCFG$ 和 $ABHI$，连结 D 和 F。设 CP 是斜边 AB 的平分线，并设它的反向延长线与 DF 交于 R。我们认为 $AP=PC$ 且 $PR\perp DF$。

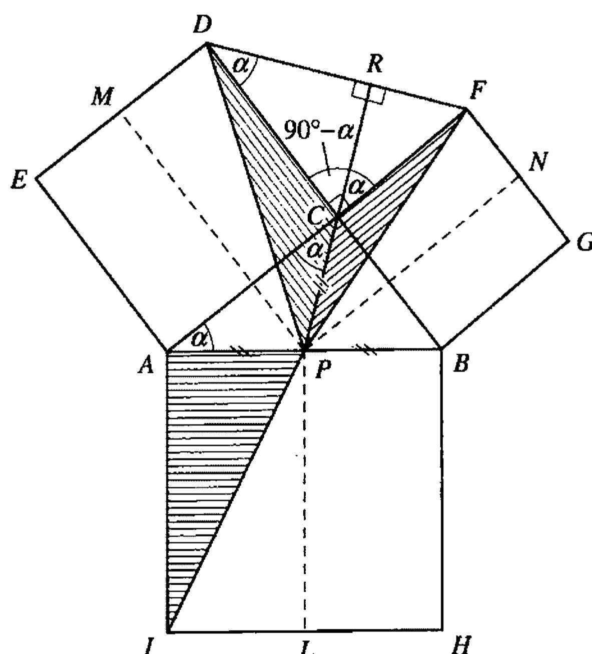


图8-9 安·康迪的证明

为了证明第一个论述，我们注意到，因为 $\angle ACB$ 是直角，三角形 ABC 可以内接于一个圆心是 P 且直径是 AB 的圆内。因此，$AP=PC$，因为它们都是半径。

为了证明第二个论述，我们注意到，三角形 ABC 和 DFC 全等，因为它们有两组相等边且在点 C 处是直角。因此，$\angle CDF=\angle BAC$。我们称这个角为 α。根据第一条论述，三角形 ACP 是等腰三角形，所以 $\angle ACP=\alpha$。因此 $\angle DCR=90°-\alpha$，因此 $\angle CRD=90°$，这就是要证明的结果。

我们已经准备好了证明主定理。分别作点 P 到边 ED、FG 和 HI 的中点 M、N 和 L 的连线 PM、PN 和 PL，这些线分别与三个正方形的边 AE、BG 和 AI 平行。现在，我们求三角形 PFC、PDC 和 PAI 的面积，并把它们与对应的正方形的面积比较。为了避免重复，PFC 表示三角形 PFC 的面积，$AEDC$ 表示正方形 $AEDC$ 的面积，以此类推。我们有 $PFC=FC\times FN/2$，因为 FC 是底，FN 是高。但是，$FN=FG/2=FC/2$，所以，$PFC=FC^2/4=1/4\times BCFG$。用相同的方法可得 $PDC=1/4\times ACDE$，$PAI=1/4ABHI$。

现在，我们利用这样的事实：有相同底的两个三角形的面积比等于它们的高度比。因此，

$$\frac{PDC+PFC}{PAI}=\frac{DR+RF}{AI}=\frac{DF}{AI}=\frac{AB}{AB}=1$$

代入刚才找到的 PDC、PFC 和 PAI 的表达式，并消去 1/4，最后我们得到

$$\frac{ACDE+BCFG}{ABHI}=1,$$

即 $ACDE+BCFG=ABHI$，这就是毕达哥拉斯定理。

这是一个相当精巧的证明，更令人瞩目的原因是它在 1938 年由印第安纳州南本德中央高中的一名学生给出的。卢米斯曾真诚地赞扬这位学生说："这样一名 16 岁的女孩子做了印度、希腊，甚至是现代的伟大数学家都没有做到的事情。这是第一个这样的证明，在这个证明中所有的辅助线和所有的三角形都是在给定的三角形的斜边上的中点出发构建的。这个证明就是安 · 康迪的证明。"



下面的两个证明是根据欧几里得的卷 III 中的命题 35 和 36 而来的，

在这里我们用现代语言给出这两个命题。

命题 35　过圆内一个点 P 作一条弦与圆相交于点 A 和 B，则积 $PA\times PB$ 是常量，对于所有通过点 P 的弦，它都有相同的值。

命题 36　过圆外的一点 P 作一条弦与圆相交于点 A 和 B，那么积 $PA\times PB$ 等于 PT^2，其中 PT 是从点 P 到圆的切线的长度。(因此，对于通过点 P 的所有弦来说，$PA\times PB$ 是常量。)

设 P 是圆心为 O 的圆内的一点（图 8-10）。考虑过点 P 的两条弦，一条通过点 O，另外一条垂直于它。设这两条弦分别与圆相交于点 A、B 和 C、D。现在，AB 是 CD 的垂直平分线，所以 $\angle OPC=90°$ 且 $PC=PD$。根据命题 35，我们有 $PA\times PB=PC\times PD=PC^2$。但是，$PA=OA+OP$，且 $PB=OB-OP=OA-OP$（OA 是半径），所以 $(OA+OP)\times(OA-OP)=OA^2-OP^2=PC^2$。用 OC 取代 OA，最后我们得到 $OC^2-OP^2=PC^2$ 或者 $OC^2=OP^2+PC^2$，这是直角三角形 OPC 的毕达哥拉斯定理。

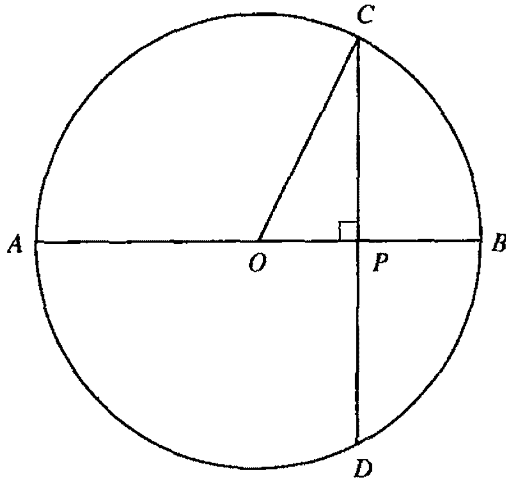


图 8-10　使用圆的不为人知的证明

再次考虑直角三角形 ACB（图 8-11）。以 B 为圆心，半径为 BC 的圆，

与 AC 相切于点 C。设 AB 的延长线与圆相交于点 P 和 Q。根据命题 36，我们有 $AP \times AQ = AC^2$，即$(c-a) \times (c+a) = b^2$，由此展开左边，我们得到 $a^2 + b^2 = c^2$。

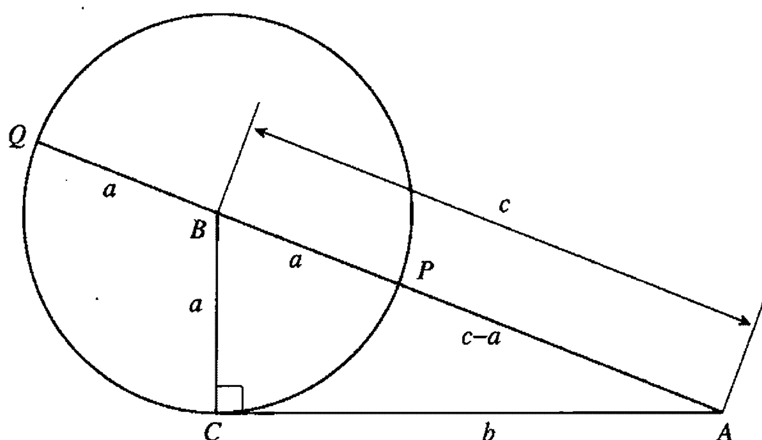


图 8-11 使用圆的另一个证明

我们再给出一个基于圆的证明，这是一个性质完全不同的证明。在直角三角形 ABC（图 8-12）中作圆心为 O、半径为 r 的内切圆，并作三条垂直于各边半径的垂线。这把每一条边都分成如图所示的两部分。特别地，$c = (a-r) + (b-r) = a + b - 2r$，从这个等式我们可以得到 $r = (a + b - c)/2$。现在，我们用两种方法求 ABC 的面积。首先，我们直接得到 $A = ab/2$。通过把三角形 ABC 分成三个高都等于 r 的三角形 AOB、BOC 和 COA，我们得到 $A = ar/2 + br/2 + cr/2 = (a + b + c)r/2 = (a + b + c)/2 \times (a + b - c)/2 = ((a + b)^2 - c^2)/4$。用等号连接三角形 ABC 面积的两个表达式并化简，我们得到 $a^2 + b^2 = c^2$。卢米斯对这个证明给出若干版本，而且为了稳固其历史地位，附加说明道："这个证明是作者于 1901 年 12 月 13 日在得到《美国数学月刊》，卷 VIII, 1901, p.258 之前给出的，后者给出了一个类似的证明。"

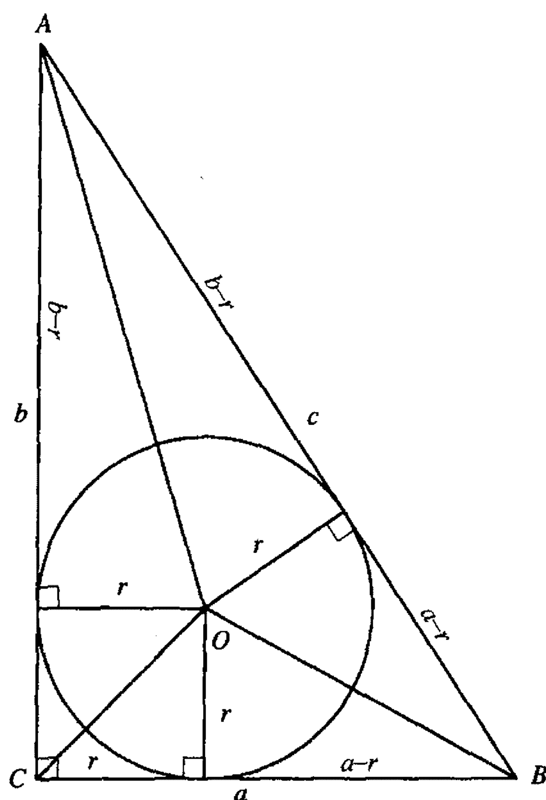


图 8-12　使用圆的第三个证明



就在我写这本书的时候，又有人提出毕达哥拉斯定理的新证明。在这里，我把亚历山大（Alexander Bogomolny）的一个非常好的网站介绍给读者（www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtm），从这个网站上，你可看到下面这个非常优秀的证明。

把直角三角形(a,b,c)补成一个边为 a 的正方形（图 8-13a）。关于这个三角形的上顶端按逆时针方向旋转 90°（图 8-13b），然后再清除原来的三角形。于是产生如图 8-13c 所示的四边形，显然它的面积等于正方形的面积。因此，$a^2 = c^2/2 + (a-b)(a+b)/2$，经过化简，我们得到 $a^2 + b^2 = c^2$。[5]

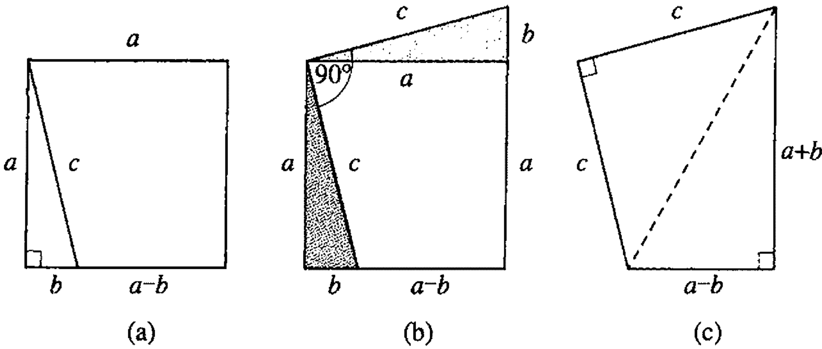


图 8-13 基于旋转的证明

这是一个相当不同寻常的证明，其开创性的方法引人注目，即使它可能基于不太稳固的基础，我称它是“利用微分的证明”。图 8-14 给出一个四分之一圆，其圆心为 O、半径为 a。设 $P(x,y)$和 $Q(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$是圆上两个相邻点，其中，$\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 分别表示“无穷小”量。当点 P 沿圆向 Q 点移动时，貌似三角形的小图形 QRP（在 R 有直角）几乎与三角形 OSP 相似，点 P 越靠近 Q 相似度就越高。在极限意义下，$P \to Q$ 时，我们有$\triangle QRP \backsim \triangle OSP$，由此可以得到

$$QR/RP = OS/SP$$

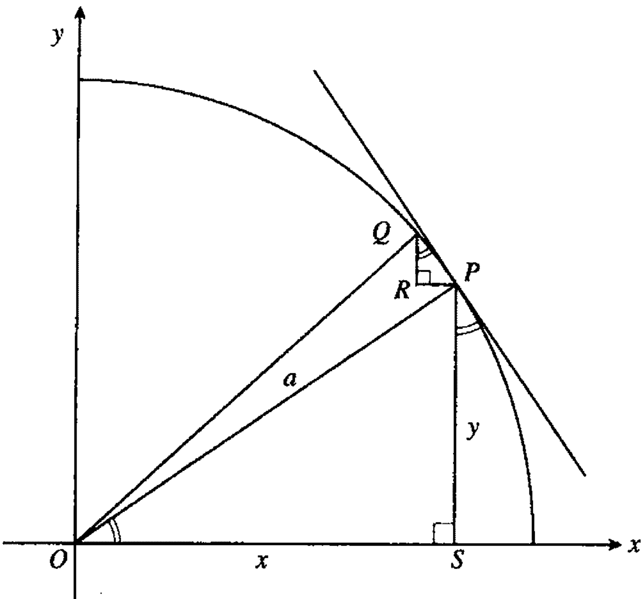


图 8-14 利用微分的证明

但是，$OS = x, SP = y, QR = -\mathrm{d}y, RP = \mathrm{d}x$（注意，这里所有线段都是有向的，因此在 dy 之前有负号）。于是，$-\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = x/y$，经过交叉相乘后我们得到

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0 \tag{4}$$

这就是一般解为

$$x^2 + y^2 = c \tag{5}$$

的微分方程，其中 c 是常量，是任意的。为了确定这个微分常量，我们注意到当 $x = 0$（P 在圆的顶端），我们有 $y = a$。把这个结果代入方程（5）中。我们发现 $c = a^2$，所以有

$$x^2 + y^2 = a^2$$



为了给这些丰富多彩的证明画上句号，下面（图 8-15）是一个基于棋盘模式的证明，用单一模式填充整个平面，不留任何空位且没有重叠。这是一个“无字证明”，所以，我们不再进一步给出解释。[6]

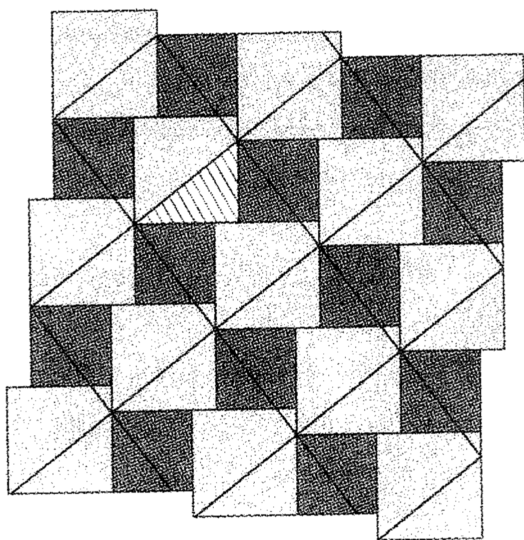


图 8-15　基于棋盘模式的证明

在评判这些证明的相对价值时，我们首先要问：应该使用什么标准进行评判？我们希望好证明尽可能简单，但什么是“简单”呢？是证明所用的行数吗？还是解释词汇的数量？也许更好的标准应该是特定证明所依据的已有定理的数量。图 8-11 给出的证明似乎足够简单，但是它依赖于圆的若干性质，每一个性质自身是一个定理。根据这个标准，被叔本华描述为“陷阱”的欧几里得的证明 I-47 就是一个最简单的证明，因为它依赖前面的定理数量最少。你也许想说无论欧几里得是否知道 400 个证明，或者今天我们知道的这些证明，他都会选择他给出的 I-47 作为证明。这个问题答案也许真是这样。

注释和参考文献

[1]（全美数学教师协会，1968）以后各章这本著作都使用卢米斯的称谓。

[2] *Original Investigation, or How to attack an Exercise in Geometry* (Bonded Scale and Machine Company, 1952)，由 Arthur Gluck 作序。所参考的其他文献是 *The National Cyclopaedia of American Biography*(1967)，卷 15，p.186 以及 David E. Kullman（迈阿密大学）的“Elisha S. Loomis, 1852-1940”，2004，网页：http://www.bgsn.edu/departments/math/Ohio = section/bicen/esloomis.html。

[3] Kullman, “Elisha S. Loomis”, p.2。

[4] 熟悉三角学的读者应该在托勒密定理中发现加法公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，关于托勒密定理的更详细讨论以及他的生平，请参考《三角之美》，pp.24-25, 91-94。

[5] Bogomolny 认为这个证明来自 W. J. Dobbs, *Mathematical Gazette*, 7（1913—1914），p.168。

[6] 我在 Roger B. Nelsen, *Proofs without Words II: More Exerises in Visual Thinking*（美国数学协会，2000），p.3 中发现了这个证明。Nelsen 认为它属于阿拉伯的 Annairizi（大约公元 900 年）。

补充4　折叠的袋子

> 简洁，简洁，还是简洁。我是说，让你手头的事务只剩两三件，而不是成百上千；不是计数百万个而是只计数五六个，让你的账目只手可数。
>
> ——亨利·戴维·梭罗，《瓦尔登》(1854)

我相信下面的证明是最短的证明，而且也可能是最巧妙的毕达哥拉斯定理的证明。但是首先要作两点说明。

1. 正如第 3 章所提到的那样，这个定理不是仅仅适用于构建于直角三条形三条边上的正方形，而是适用于任意相似图形。特别地，我们可以选择任意多边形作为我们的代表形状。因为相似多边形的面积比等于对应边的平方比，所以我们只需证明这个定理适用于这个特殊的多边形就足够了。

2. 词组“构建于”通常被解释成正方形或者我们取而代之的相似图形被构建在一个直角三角形的*外面*。但是，没有任何这样的规定。实际上，我们可以自由地把三个图形中的任意一个构建在给定的三角形的里面，或把三个图形都构建在已知的三角形的里面。

现在，为了证明，我们应该使用哪种多边形呢？最简单的选择是三角形。事实上，为什么不是给定的三角形呢？参见图 S4-1，我们知道直角三角形 ACB、ADC 和 CDB 是相似的。而且，因为后两个三角形分割了第一个三角形，所以我们有 $S_{ACB} = S_{ADC} + S_{CDB}$，其中 S 代表面积。这正是毕达哥拉斯定理的一般形式，正如欧几里得 VI-31 中提到的（参见第 3 章）。证毕。

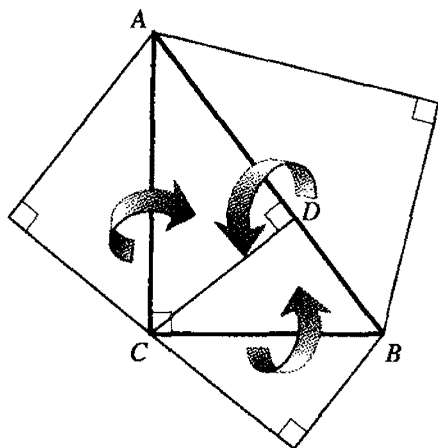


图 S4-1　折叠的袋子证明

我必须承认，我个人对这一证明做过尝试。几年前我刹那间想到了这个证明。但是，我首先必须克服传统思维：我逼着自己观察正方形之外的图形，并想着把它们构建在给定三角形的内部而不是外部。一旦克服了这些心理上的障碍，其余的问题就迎刃而解了。名留青史的梦想在我的大脑中闪现，但是我还是比较清醒：两千年中已产生了 400 个证明方法，能提出一个新证明方法的可能性几乎是零，特别是那么短的证明。然后，我翻阅了卢米斯的著作，得到证实。“我的”证明在那里出现，是几何证明的第 230 号，并附有说明。这是 1934 年 6 月 4 日由俄亥俄州扬斯敦的“一名智力超常的年轻人”，19 岁的斯坦利 · 佳申斯基提出的原创证明。我的天，一个比我年轻很多的人 70 年前就打败了我！[1] 作为一点小安慰，我高兴地给这个证明起名为*折叠的袋子*，当我看到三个三角形折叠到原来的三角形里面的时候，我的大脑就闪现出了这个名字。

注释和参考文献

[1] 然而，卢米斯给出了第二个本质上等价于这一证明的证明，但他把它作为第 96 个代数证明，对此他给出了下面的说明：“作者在 1901 年 7 月 1 日想出了这个证明，在之后的 1934 年 1 月 13 日，Fourrey 的 *Curio Geom.*, p.91 上可以找到它，它把这个证明归功于 R. P. Lamy，1685 年。”参考卢米斯的《毕达哥拉斯命题》（全美数学教师学会，1968），pp.85 和 230-231。

补充5　爱因斯坦与毕达哥拉斯相遇

$E = m(a^2 + b^2) = mc^2$。

——一个不知名者的模仿秀

12岁时，爱因斯坦（1879—1955）收到一本几何书，他贪婪地研读起来，并亲切地称其是他的“神圣几何小册子”。他在自传随笔中写道：“诸如三角形三个高相交于一点的断言——尽管不是显然的——可以明确地加以证明，使得你无法对此产生任何怀疑。这种明朗和明确给我留下了深深的印象。”[1]他继续说道：

> 在我拿到这书神圣的几何小册子之前，我的伯父就跟我说过毕达哥拉斯定理。经过大量的努力，我用相似三角形的方法成功地“证明”了这个定理。在此过程中，对我来说，直角三角形边的（比例）关系应该由其中一个锐角唯一确定是很“显然”的。在相似情况下，只有我看来不太“显然”的东西才需要去证明。

爱因基坦的“证明”（他很小心在这一词上用了双引号，显然是不希望因此而沾光）被他的传记作家和合作者霍夫曼重新构建起来。[2]结果，它就是卢米斯著作中的第一个“代数证明”（书中认为这个证明是由勒让德给出的，实际上它是欧几里得的第二个证明。参见第3章）。爱因斯坦早年对毕达哥拉斯定理的迷恋在十年后结出成果：毕达哥拉斯定理扮演重要的角色，首先是在他的狭义相对论中以四维形式出现，再后来在他的广义相对论中以更一般的形式出现。

注释和参考文献

[1] 由 Paul Arthur Schlipp 编译，（Open Court, 1979），pp.9-11。

[2] 《阿尔伯特 · 爱因斯坦：历史和文化的视角》，Gerald Holton 和 Yehuda Elkana 编辑（普林斯顿大学出版社，1982），pp.92-93。

补充 6　一个最不同凡响的证明

> 请忘记你在学校学过的所有东西；因为你还没有真正理解它。
>
> ——艾德蒙·朗道，《分析基础》(1960)，p.v.

"不存在毕达哥拉斯定理的三角学证明，因为三角学的所有基本公式都是以毕达哥拉斯定理为基础的。三角学为真，是因为毕达哥拉斯定理为真。"卢米斯在他的著作《毕达哥拉斯命题》最后这样声称。的确，在直角三角形 ABC（图 S6-1）中，如果我们定义角 α 的正弦和余弦为 $\sin\alpha = a/c$ 和 $\cos\alpha = b/c$，那么 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (a/c)^2 + (b/c)^2 = (a^2 + b^2)/c^2 = c^2/c^2 = 1$。在证明这个等式的过程中我们使用了毕达哥拉斯定理，所以不能使用相同的等式去证明毕达哥拉斯定理，否则就会触犯数学的禁忌，循环论证。所以，在证明毕达哥拉斯定理时，三角学是禁区。

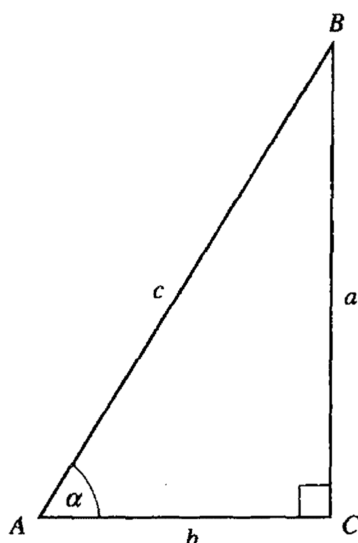


图 S6-1　$\sin\alpha = a/c, \cos\alpha = b/c$

也许不是吧？就在卢米斯正忙于其著作的第 2 版时，艾德蒙·朗道在德国出版了一本教科书《微分和积分》，[1]这本教科书成为严格阐述的典范。朗道（1877—1938）是哥廷根大学的数学教授，第二次世界大战之前这所大学是世界级的数学研究中心。他在解析数论中的工作最出名，所谓的解析数论就是把分析的方法（即微分法）运用于整数的研究。他发表了近 250 篇论文，并撰写了几本其领域中有巨大影响的著作，其中有《素数理论与分布手册》(*Handbook of the Theory and Distribution of the Prime Numbers*, 2 卷, 1909 年)和《数论讲义》(*Lectures on Number Theory*, 3 卷，1927 年)。

朗道因他的近乎迂腐的严格而闻名。在执教的过程中，他回避对几何的任何引用，称其为“贿赂”。其 372 页的微积分著作比今天 1000 多页的书讲的内容还要多，没有一幅插图。他使用简洁的定义—定理—证明式的风格及随处增补例子的方式，从基本原理开始一直讲到最高层次，揭示出微积分来。在此，我们特别感兴趣的是关于三角函数的第 16 章。这一章是这样开始的：[2]

定理 248

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

处处收敛。

（当然，这是幂级数 $x-x^3/3!+x^5/5!-\cdots$）。紧接着下面是

定义 59

$$\sin x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

sin 读作“sine”。

再接下来就是把 $\cos x$ 定义为幂级数 $1-x^2/2!+x^4/4!-\cdots$，其后是通过

几个定理来建立这些函数的常见性质，包括加法公式 $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ 和奇偶关系 $\sin(-x)=-\sin x$ 和 $\cos(-x)=\cos x$。然后是

定理 258

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

证明

$$1=\cos 0=\cos(x-x)=\cos x\cos(-x)-\sin(x)\sin(-x)=\cos^2 x+\sin^2 x$$

这样，他不动声色地引出了数学中最著名的定理：毕达哥拉斯定理。

毫无疑问，我们大多数人都会认为这纯粹是一种书生的诡辩。实际上，它改变了局面。三角函数是通过无穷极数定义的，并命名为 sine 和 cosine，然后用严格的形式方法来加以处理，人们并没有考虑它们在几何中的任何作用，更不用说是直角三角形了。当然，隐含的假设是，读者看到这些函数时知道它们是什么，举个例子说就是能够推断出一个看似鸭子、走起来像鸭子的东西实际上就是鸭子。但是，也许朗道不想让我们做这样的假设。

有人怀疑作为 x 的函数的两个无穷级数在平方后求和的结果是常量 1，我们给出一个验证过程（这不是一个证明）。让我们仅取每一个级数的前两项，求平方，然后再相加：

$$\begin{aligned}&(1-x^2/2!)^2+(x-x^3/3!)^2\\&=1-2x^2/2!+x^4/(2!)^2+x^2-2x^4/3!+x^6/(3!)^2\end{aligned}$$

第二项和第四项相互抵消，剩下 $1-x^4/12+x^6/36$。如果取每一个级数的前三项重复刚才的过程，这一工作尽管麻烦但很直接，我们就会发现 x^2 和 x^4 项可以消去。按此模式继续下去，我们取的项越多，x 的幂的项消去的就越多，给我们剩下的就是第一项 1 和后面分母很大的项。当每一个级数的项数趋于无穷时，它们的平方和趋于 1。

那么，这不是一个可接受的毕达哥拉斯定理的证明吗？当然，它依赖于要给谁讲述这个证明。毫无疑问，我们大多数人还是喜欢传统的证明，使用直角三角形或者其他几何图形。但是，对朗道来说，这是不能接受的。他的证明只建立在基本原理之上，对于这一问题就是无穷级数。无论这些级数在“现实”世界中有什么意义，都与他没有丝毫的关系。他是超一流纯数学家的化身。

注释和参考文献

[1] 由 Melvin Hausner 和 Martin Davis 翻译(Chelsea, 1965)。

[2] 后面的材料取自于《三角之美》，pp.192-197。在这本书里读者可以找到朗道的生平介绍。

第9章

主旋律与变奏曲

> 毕达哥拉斯是发现直角三角形伟大真理的第一人。他指出（直角）边上的正方形面积之和等于斜边上的正方形面积，这个公式深深印入几何教室里的每一个十几岁孩子的大脑，从得梅因到乌兰巴托。
>
> ——利昂·莱德曼（合著者：迪克·泰雷西）
>
> 《上帝粒子：如果宇宙是答案，究竟什么是问题》，p.66

好了，所以 $a^2 + b^2 = c^2$，而且我们已有 400 个证明它的方法。还有什么要说的吗？

还有很多。由于某些无法说清楚的原因，没有哪个定理能像毕达哥拉斯定理那样衍生出如此多的注释、变形、应用和珍品。其中有一些是显而易见的，而另外一些则是非常深奥的。下面是从各种资料精选的例子，毫无疑问，还可以找到更多例子。

如前所述，欧几里得 VI-31 中陈述的这个定理的一般形式允许我们用任意图形——多边形或非多边形，来取代直角三角形边上的正方形，只要它们相似即可。[1] 图 9-1 给出对于正五边形的定理，而图 9-2 给出了以各边为直径的半圆形的情况。

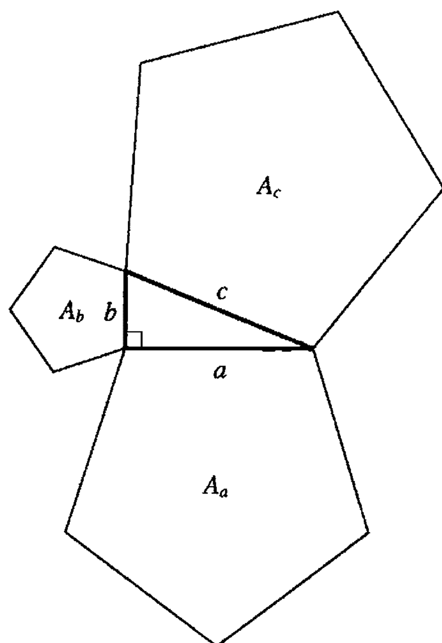


图 9-1　运用于正五边形的毕达哥拉斯定理：$A_c = A_a + A_b$

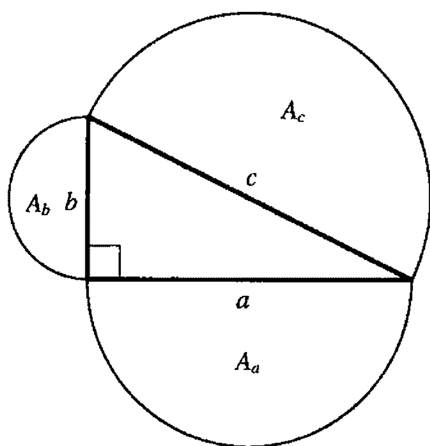


图 9-2　运用于半圆的毕达哥拉斯定理：$A_c = A_a + A_b$

当然，对完整的圆这一定理也同样为真，只是此时的三个圆有部分重叠，因此整个图显得有些凌乱（图 9-3）。这导致一个有趣的结果。我们知道，通过任意三个非共线的点，能且仅能做一个经过这三个点的圆。换言之，任意一个三角形只能被一个圆外接，我们称其为外接圆。现在，假设顶点形成一个直角三角形。一个著名的定理（欧几里得 III，31）说，

直角对着这个外接圆的直径。换句话说，直径与斜边重合。因此，在任意的直角三角形中，两条直角边上的圆的面积之和等于外接圆的面积。

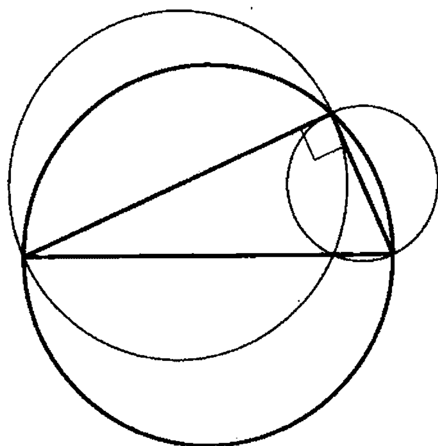


图 9-3 运用于整圆的毕达哥拉斯定理

一个更有趣的结果涉及希波克拉底弓形（以希俄斯岛的希波克拉底的名字命名，活跃于公元前 460 年）。考虑圆心为 O，半径 $OA = OB$（图 9-4）的四分之一圆 AOB。以 AB 为直径做一个半圆。希波克拉底弓形是一个月牙形区域。令人惊讶的是，这个弓形的面积等于三角形 AOB 的面积。证明相当简单：

弓形的面积 $=AB$ 上半圆的面积－圆弓形 AB 的面积

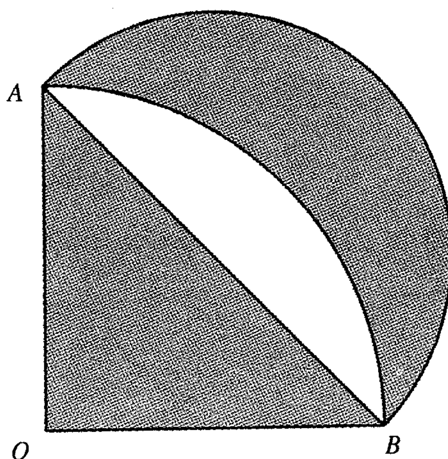


图 9-4 希波克拉底弓形

而 AB 上半圆的面积等于 $1/2\times\pi AB^2/4$，圆弓形 AB 的面积是以 OA 为半径的四分之一圆面积与三角形 AOB 的面积的差，即 $1/4\times\pi OA^2-OA^2/2$。因此，我们有

$$弓形面积=\frac{1}{2}\times\frac{\pi AB^2}{4}-\left(\frac{1}{4}\times\pi OA^2-\frac{OA^2}{2}\right)$$

但是，$AB^2=OA^2+OB^2=2OA^2$。把这个结果代入到上面计算式中，我们得到 $\frac{\pi\times 2OA^2}{8}-\frac{\pi\times OA^2}{4}+\frac{OA^2}{2}$。前两项抵消，所以有

$$弓形面积=\frac{OA^2}{2}=\triangle AOB\text{ 的面积}$$

令人惊讶的是，这个结果竟然与π无关，即使这个弓形是由两个圆的弧生成的。而且，因为三角形总是可以“正方形化”(这里的意思是我们总是可以用直尺和圆规从一个三角形构建一个面积等于三角形面积的正方形)，这个结果表明这个特殊的弓形可以正方形化。相反，众所周知，整圆不能正方形化。[2]



一个基于毕达哥拉斯定理的著名构造法让我们能够构造出任意整数 n 的平方根，假设我们已经构造出 $n-1$ 的平方根。在图 9-5 中，设 OP_1 是沿数轴从 0 到 1 的线段。在点 P_1 处作 $P_1P_2\perp OP_1$，且长度为 1。从 O 到 P_2 的半径向量的长度 $r_2=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$。在点 P_2 作 $P_2P_3\perp OP_2$，且长度为 1。于是，从 O 到 P_3 的半径向量长度为 $r_3=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$。以这种方式进行 n 次，我们得到 $r_n=\sqrt{n}$。点 $P_1, P_2, \cdots$，形成一个如图所示的螺旋形状。

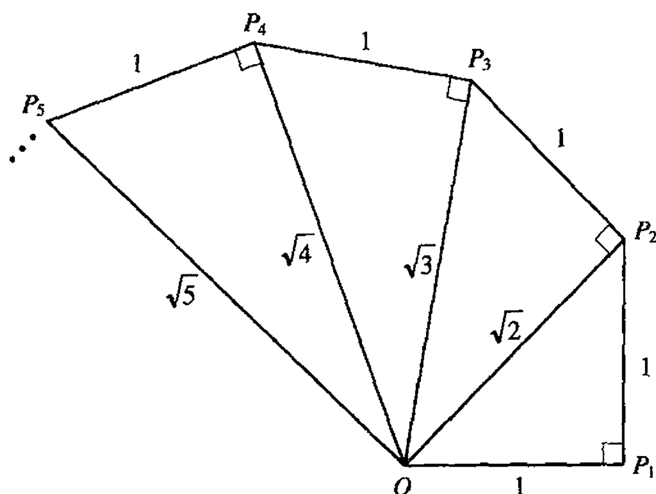


图 9-5　平方根螺旋



设一个圆内切于一个各边为整数长度的直角三角形内（因此，这三个数形成一个毕达哥拉斯三元组）。那么，这个内切圆的半径也是一个整数。为了证明这一点，我们回到图 8-12，根据这个图，可以推导出公式 $r = (a + b-c)/2$。要证明这个公式总是生成一个整数，我们必须证明 $a + b-c$ 是一个偶数。这可以由等式 $a^2 + b^2 = c^2$ 得到。因为，如果 a 和 b 都是偶数，那么它们的平方和也是偶数，这个平方和就是 c^2。于是 c 必须是偶数，因为奇数的平方总是奇数。另外，如果 a 是偶数，而 b 是奇数，那么它们的平方和是奇数，所以 c 也是奇数。总之，无论是哪种情况，表达式 $a+b-c$ 总是偶数，因此结论成立。[3]



在直角三角形 ABC（图 9-6）中，设从直角到斜边的垂线 CD 的长度为 d。于是，我们有

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{d^2}$$

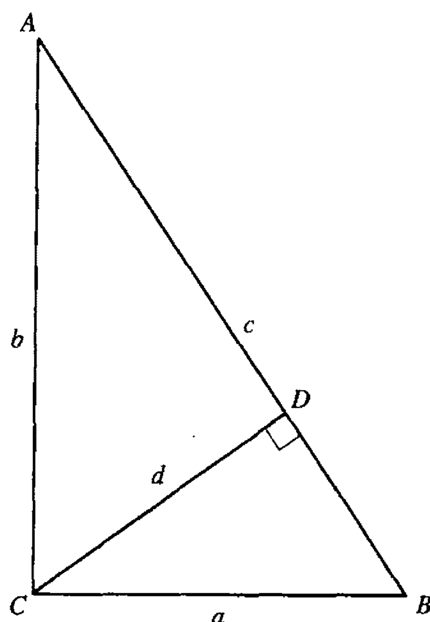


图 9-6　$1/d^2 = 1/a^2 + 1/b^2$

为了证明这个公式，我们从公式的左边开始，有 $1/a^2 + 1/b^2 = (a^2 + b^2)/a^2b^2 = c^2/a^2b^2$。于是，$\triangle ABC$ 的面积可以用两种方法书写，$ab/2$ 或者 $cd/2$，所以，我们有 $ab = cd$，从这个等式得到 $c = ab/d$。把这个结果带回到表达式 c^2/a^2b^2 之中并化简，我们得到所要的结果。我喜欢把这个公式称为“小毕达哥拉斯定理”，我们将在第 10 章用一种相当不寻常的方式使用这个公式。



毕达哥拉斯定理能够很容易地推广到任意的三角形，而不局限于直角三角形，但是要付出代价：对于方程 $c^2 = a^2 + b^2$ 的右边，我们必须加入“修正项” $-2ab\cos C$，其中 C 是边 c 所对的角。当然，这是余弦法则，在三角学的边角边（SAS）问题求解中经常遇到。但是，欧几里得已经知道这个法则的非三角形式，事实上，它是出现在《几何原本》卷 II 的命题 12 和 13，在这里，我们把这两个命题放到一起给出其现代语言描述。

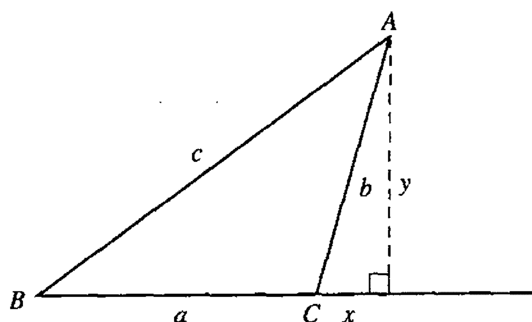
在任意三角形中，钝角（锐角）所对应的边上的正方形面

积等于相邻边上的正方形面积之和，加上（减去）相邻两边中的任一条边与这条边在另一条边上的垂直投影之积的两倍。[4]

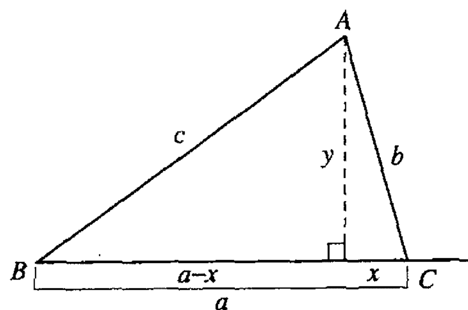
图 9-7a 给出一个边分别为 a、b 和 c 的三角形，其中 c 是钝角 C 的对边。从 A 点作边 BC 延长线的垂线，并称这个小直角三角形的边为 x 和 y。我们有

$$\begin{aligned} c^2 &= (a+x)^2 + y^2 = (a^2+2ax+x^2)+y^2 \\ &= (x^2+y^2)+a^2+2ax \\ &= b^2+a^2+2ax \end{aligned}$$

当 C 是锐角时也可以得到类似的推导（图 9-7b），只是此时我们有 $c^2=(a-x)^2+y^2$。在前一种情况中，我们注意到 $x=b\cos(180°-C)=-b\cos C$，而后一种情况中 $x=b\cos C$。因此，我们可以把这两种情况结合到一个等式中，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，其中 $\cos C$ 的符号依赖于 C 是锐角还是钝角。因此，余弦法测回避了区分这两种情况的必要。



(a) 钝角的情况



(b) 锐角的情况

图 9-7　余弦法则



再次考虑任意三角形 ABC，在三个边上构造正方形，并连结外部的角（图 9-8）。用 x、y 和 z 表示连结线段的长度。于是，我们有下面的巧妙结果：

$$x^2+y^2+z^2=3(a^2+b^2+c^2)$$

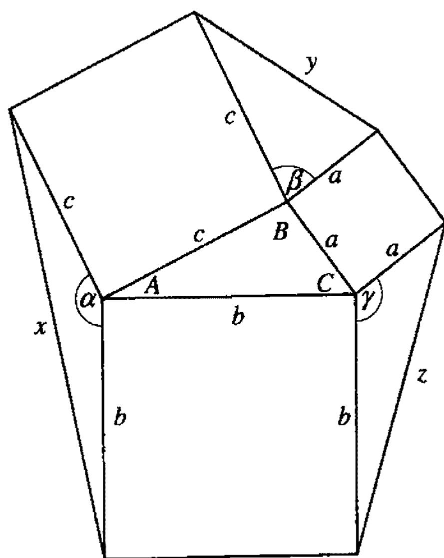


图 9-8 $x^2+y^2+z^2=3(a^2+b^2+c^2)$

为了证明这个等式，用 α、β 和 γ 分别表示外面的三角形在 A、B 和 C 处的角。对这三个角运用余弦法则，我们有

$$x^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$
$$y^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta,$$
$$z^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

把上面的三个等式加起来，我们得到

$$x^2+y^2+z^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(bc\cos\alpha+ca\cos\beta+ab\cos\gamma) \quad (1)$$

此时，对于中心的三角形 ABC，我们有

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

其中 A、B 和 C 是对应顶点的三个内角，把上面的三个等式加起来，我们得到

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C) \qquad (2)$$

因此

$$2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C) = a^2 + b^2 + c^2 \qquad (3)$$

现在，因为建立在边 a、b 和 c 上的正方形在 A、B 和 C 处形成直角，所以我们有 $\alpha = 180° - A$，$\beta = 180° - B$，$\gamma = 180° - C$。把这三个结果带回到等式(1)并利用等式 $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$，我们得到

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$$

但是，从等式(3)来看，上面表达式的最后一项等于 $a^2 + b^2 + c^2$，所以有

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2)$$
$$= 3(a^2 + b^2 + c^2)$$[5]

作为一个额外结果，我们注意到外面的 3 个三角形中的每一个都与里面的三角形有相同的面积。例如，左边的外面三角形的面积是 $1/2bc\sin(180° - A) = 1/2bc\sin A$，这就是里面的三角形的面积。



图 9-9 给出边为 a、b、c 和 d，对角线为 p 和 q 的矩形。对角线把矩形分成两个全等的直角三角形，所以有 $p^2 = a^2 + b^2$ 和 $q^2 = c^2 + d^2$。把这两个等式加起来，我们得到

$$p^2+q^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$

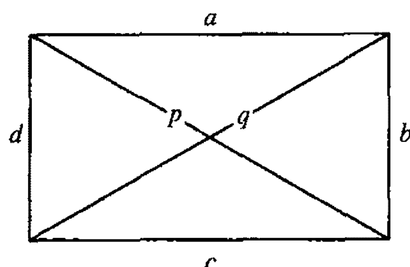


图 9-9　$p^2+q^2=a^2+b^2+c^2+d^2$

因为 $a=c$、$b=d$ 及 $q=p$，所以上面的结果是显然的。现在，我们把这个矩形拉成平行四边形（图 9-10）。我们仍然有 $a=c$ 和 $b=d$，但此时两条对角线的长度不同，而且它们把平行四边形分成两个不等边三角形，而不是直角三角形，因此毕达哥拉斯定理不再适用于它们，但是关系式 $p^2+q^2=a^2+b^2+c^2+d^2$ 仍然成立。为了证明这一结论，设边 a 和 b 之间的夹角为 θ。于是我们有 $p^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$ 及 $q^2=a^2+d^2-2ad\cos(180°-\theta)=a^2+d^2+2ad\cos\theta$。在第二个等式中用 c^2 取代 a^2 并与前面的等式相加，我们得到想要的结果。（然而，对任意的四边形，这个结果不再为真。）

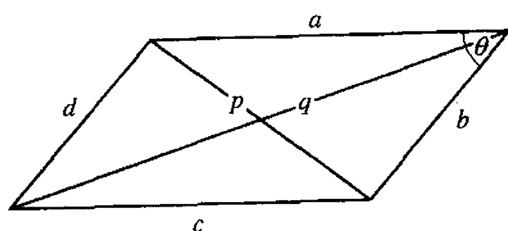


图 9-10　$p^2+q^2=a^2+b^2+c^2+d^2$



两次使用毕达哥拉斯定理可以导出任意三角形面积的著名公式。设三角形的边为 a、b 和 c，并设 $s=(a+b+c)/2$ 为它的半周长。于是

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

通常人们认为这一著名公式是希腊数学家、测量家和工程师海伦（Heron）的成果，他大约生活在公元前 100 年到公元 100 年之间（他的名字有时也拼写成 Hero），但是根据阿拉伯天文学家比鲁尼（973—1048）的记载，这一结果实际上是由阿基米德发现的。[6]海伦公式最令人注目的是，它使得我们可以仅仅使用三角形的边来计算三角形的面积，也就是 a、b 和 c 唯一决定 A。这是因为，在所有多边形中，只有三角形是刚性多边形：如果一个三角形可以由三个已知边构成，那么它是唯一的。（对于其他任意多边形都不成立。例如，由四条相等的边我们可以构造无穷多个菱形，每一个的面积都不相同。）人们认为海伦利用这个公式计算了每年被洪水淹没后的尼罗河岸的土地，仅仅依靠少数依稀可见的土地轮廓，这些信息被用于给失去土地的人减免一定的税金。

为了证明海伦公式，我们利用图 9-11。从顶点出发作边 a 的高 h，它把边 a 分成 m 和 n 两部分。我们有

$$m^2+h^2=b^2,\ n^2+h^2=c^2$$

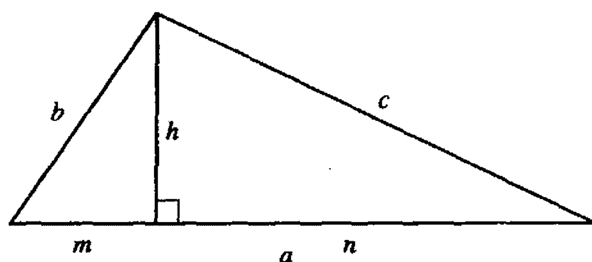


图 9-11　海伦公式的证明

从第一个等式减去第二个等式，我们得到

$$m^2-n^2=b^2-c^2$$

但是，$m^2-n^2=(m+n)(m-n)=a(m-n)$，因此 $m-n=(b^2-c^2)/a$。把这个等式与 $m+n=a$ 相加，并求解 m 和 n，我们得到

$$m=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}, \quad n=\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}$$

于是有

$$\begin{aligned}h^2=b^2-m^2=b^2-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}\\=\left(b+\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\left(b-\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\\=\frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a^2}\\=\frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{4a^2}\\=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}\end{aligned}$$

最后等式中的每一个因子都可以用半周长 $s=(a+b+c)/2$ 表示：

$$\begin{aligned}h^2=\frac{2s\times 2(s-c)\times 2(s-b)\times 2(s-a)}{4a^2}\\=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}\end{aligned}$$

因此，

$$h=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

最后，我们求得这个三角形的面积：[7]

$$A=\frac{ah}{2}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

作为由海伦公式而来的一个额外结果，这里我们不加以证明地给出这个结果。三角形的内切圆和外接圆的半径 r 和 R 分别为：

$$r=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}=\frac{A}{s}, \quad R=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}=\frac{abc}{4A}$$



当然，毕达哥拉斯定理在分析几何或者坐标几何中起着关键的作用，坐标几何是由笛卡儿（1596—1650）在 1637 年发明的。每一个学过代数和分析的学生都熟悉下面这个距离公式：$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$（其中有些学生很随便地把它“化简成”$(x_2-x_1)+(y_2-y_1)$，并与判其为错误的老师争执）。奇怪的是，这个公式第一次是出现在法国数学家克莱洛（1713—1765）于 1731 年出版的著作《双曲线的研究》之中，其形式是 $\sqrt{\overline{x\mp a}^2+\overline{y\mp b}^2}$（注意这公式中古式的上横线，这是我们今天使用的圆括号的前身）。[8]

没有理由把我们局限于二维。毕达哥拉斯定理的三维形式说的是：*在一个长方形的盒子中，空间对角线上的正方形等于三个边上的正方形之和。*[9]设这个盒子的大小是 $a\times b\times c$（图 9-12）。作这个盒子底部的对角线 AC，并设其长度为 e。在水平三角形 CDA 中，我们有 $e^2=a^2+b^2$；在垂直的三角形 CAE 中，我们有 $d^2=e^2+c^2$。把这两个等式结合起来，我们有

$$d^2=a^2+b^2+c^2$$

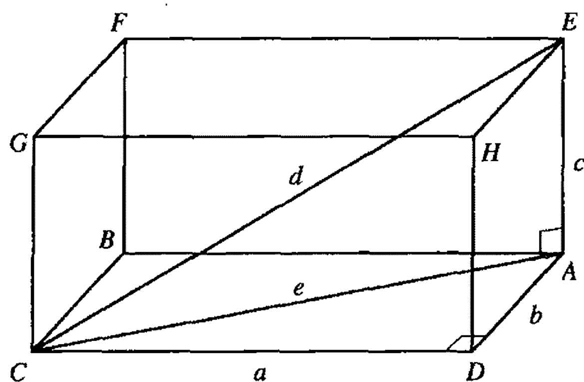


图 9-12 $d^2=a^2+b^2+c^2$

这一等式使我们可以构建毕达哥拉斯四元组，即满足 $d^2=a^2+b^2+c^2$

的整数（a，b，c，d），例如（3，4，12，13）和（36，77，204，221）。

如果我们要求这个盒子的三个面对角线都有整数长度，则会发生更有趣的情况。用 e、f 和 g 表示这些对角线，于是我们有 $a^2+b^2=e^2$，$b^2+c^2=f^2$，$c^2+a^2=g^2$。有一个据说是欧拉发现的解，$(a, b, e)=(240, 44, 244)$，$(b, c, f)=(44, 117, 125)$和$(c, a, g)=(117, 240, 267)$，如图 9-13 所示。能否使三个面对角线和空间对角线都有整数长度（也就是，是否有使 $a^2+b^2+c^2=d^2$ 及上面三个方程同时成立的整数解）的问题至今仍悬而未解。在我写这本书时，人们还不知道这样的“毕达哥拉斯立方体”。[10]

❖ ❖ ❖

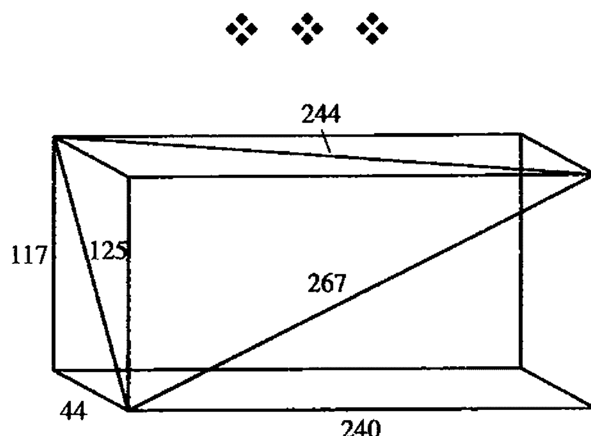


图 9-13 “毕达哥拉斯盒”

还是有一个结果。图 9-14 中阴影部分的矩形的面积是 $A=af=a\sqrt{b^2+c^2}$，所以 $A^2=a^2(b^2+c^2)=a^2b^2+a^2c^2$。但是，$ab$ 和 ac 是底面和背面的面积，所以我们有

$$A^2=A_{底}^2+A_{侧面}^2 \tag{4}$$

这个类似毕达哥拉斯的等式把直三角柱的前面的面积与其侧面的面积关联起来。如果我们把这个盒子的底、侧面和背面的不相邻顶点对连接起来，产生图 9-15 所示的帆形三角形，就会有一个更有趣的结果。我

们有下面的公式

$$A^2_{ACF}=A^2_{ABC}+A^2_{ABF}+A^2_{CBF} \tag{5}$$

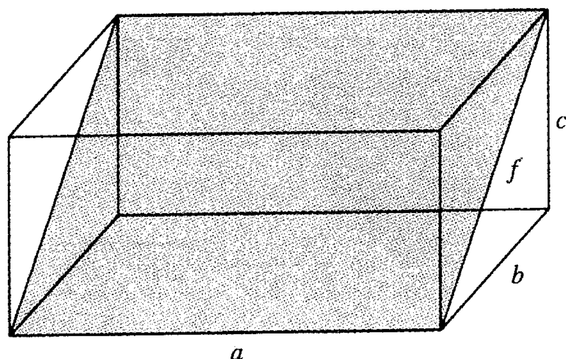


图 9-14 $A^2= A^2_{底}+A^2_{背面}$；

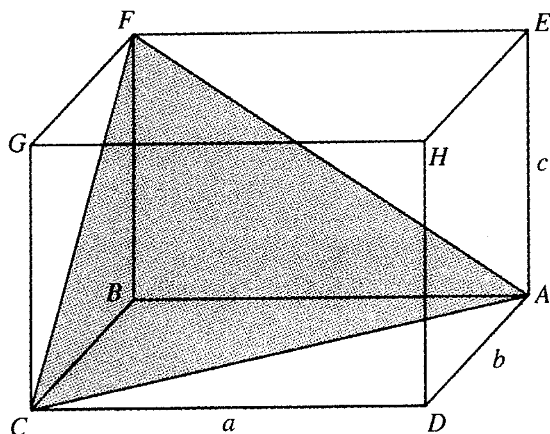


图 9-15 $A^2_{ACF}=A^2_{ABC}+A^2_{ABF}+A^2_{CBF}$

这表明，直四面体的前面面积的平方等于其他面面积的平方之和。这些公式与毕达哥拉斯关系式 $c^2=a^2+b^2$ 及 $d^2=a^2+b^2+c^2$ 的相似之处令人相当震惊。[11]

为了证明等式(5)，我们利用图 9-16，这个图中的顶点字母与图 9-15 一样。在直角三角形 *ABC* 中，从 *B* 点作高 *p* 垂直于 *AC*。我们在这章前

几页中曾看到 $1/p^2 = 1/a^2 + 1/b^2$，从这个等式可以得到 $p = ab/\sqrt{a^2+b^2}$。在三角形 ACF 中，从 F 点作高 h 垂直于 AC，这个高是直角三角形 PBF 的斜边，所以我们有

$$h=\sqrt{p^2+c^2}=\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+c^2}=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}$$

因此三角形 ACF 的面积是

$$A_{ACF}=\frac{1}{2}\text{底}\times\text{高}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{4}}$$

把上式两边平方，我们得到

$$A_{ACF}^2=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{4}=\left(\frac{ab}{2}\right)^2+\left(\frac{bc}{2}\right)^2+\left(\frac{ca}{2}\right)^2$$
$$=A_{ABC}^2+A_{ABF}^2+A_{CBF}^2$$

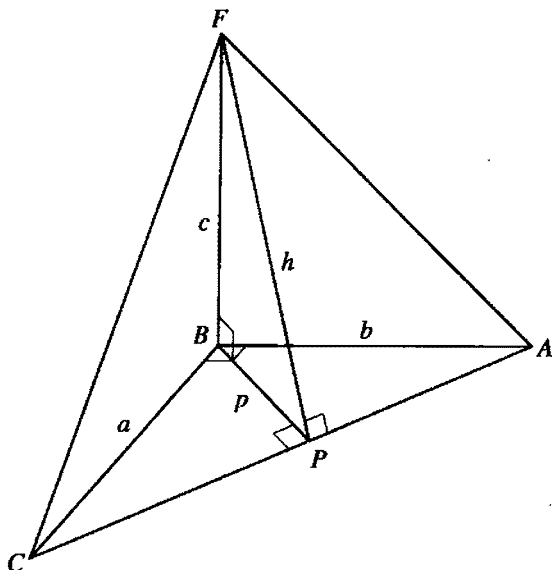


图 9-16　一个直角四面体



但是，为什么停止在三维了呢？数学家经常要研究四维、五维或者任意维，即使我们在书面上无法看到它们。例如，半径为 r、圆心在原点的四维球体“看起来”像是 $x^2+y^2+z^2+t^2=r^2$（别要求我画出它）。一旦我们冲破熟悉的三维世界的限制，就没有什么理由不把维数扩展到无限。也许很难想象维数是 x_1，x_2,…的“长方形盒子”。但是，关键在于，与物理科学不同，数学为其实践者创造他们自己的世界提供了全面的自由，唯一的要求就是不存在自相矛盾的逻辑规则。所以，没有什么能够阻止我们去想象无限维的空间，甚至在其中进行研究。

然而，如果说无限维盒子与普通盒子保持某种类似性的话，我们应该能够求得它的空间对角线的长度。假设在这个空间中毕达哥拉斯定理成立，那么这条对角线长度由下面的公式给出

$$d=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots}$$

当然，为使这个公式有意义，根号下面的和必须是有限的，即它必须收敛。这就立即把毕达哥拉斯定理从它原来的几何环境扩展到了分析领域，分析是数学的一个分支，研究连续性、变化和极限过程。

所有这些听起来似乎是很抽象，但事实上它有很多重要的实际应用。在这里，我只讨论其中的一个应用，它源于激发毕达哥拉斯形成其宇宙观的课题——声学，即声音的科学。

每一种声音都是很多不同振动的混合体，每一种振动由一个简单的正弦波表示，有其自身的振幅和频率。音乐的声音是由正弦波组成的，它的频率是最低频（即基频）的整数倍。基频决定这个声音的音调，即它在五线谱中的位置，而更高的频率，也就是我们所说的和声或泛音，则决定它的音色，也就是使小提琴不同于竖琴的音色，即使这两种乐器演奏同一个

音。设基音频率是f，即每秒的周期数（例如，C之上的音符A的频率是440cps）。其泛音的频率是$2f$，$3f$，…另外，每一个泛音有自己的振幅a_n，所以我们可以把它的振动表示为$a_n \sin(2\pi nf)t$（$n = 1,2,3,\cdots$），其中t表示时间。实际的音是这些振动之和，即$\sum_1^\infty a_n \sin(2\pi nf)t$。[12]

现在，在声学理论中已经证明，纯正弦波的能量与它的振幅成正比。因此，这个音所携带的总能量可以由表达式$a^2{}_1 + a^2{}_2 + a^2{}_3 + \cdots$给出，这与前面的平方根是一个无限多维盒子的对角线长度的表达式相同。这个和收敛的原因是这个声音的总能量不能超过这个声音发生时（例如，拉一根琴弦时）最初注入的能量，因此，这一能量是有限的。

就这样，我们走完了整整一个循环：从纯抽象的数学思维又重新回到了音乐的道路。毕达哥拉斯对无穷维空间的想法会做什么反应呢？从历史记录来看，他也许会被吓到。希腊人对无穷有着根深蒂固的怀疑，他们曾成功地将它逐出数学。所以，毕达哥拉斯不大可能接受从我们适应的三维空间到某个无穷维空间的跳跃。

但是谁知道呢？他也许会因数学和音乐之间的出乎意料的联系而激动得发抖，不顾一切地接受它。我们只能推测。

注释和参考文献

[1] 这是根据这样的事实得到的：相似多边形的面积比等于对应边的平方比。因此，如果一个多边形的边是另一个多边形的对应边的t倍，那么第一个多边形的面积将是第二个多边形的面积的t^2倍。把等式$c^2 = a^2 + b^2$的两边乘以t^2就可以证明这一结果。

[2] 关于弓形的更多内容可以在Tobias Dantzig的*The Bequest of the Greeks*(Charles Scribner's Sons，1955）的第10章中找到。

[3] 用初等数论方法可以证明a和b不可能都是奇数。参阅附录B。

[4] 对于这两个性质的其他注释，参见欧几里得的《几何原本》的希思翻译

本，其中有介绍和注释。(3 卷，Dover，1956)，卷 1, pp.403-409。

[5] 我是在 J. L. Heilbron 的 *Geometry Civilized: History Culture, and Technique*（Clarendon Press, 1998），p.164 中发现了这个美妙的结果。这是我在做一个小小的外科手术之前的事。因为知道我要在医院花几个小时等待手术，又要花更多时间康复，所以我匆忙地在一页纸上写了几个我想要证的定理，其中就包括这个定理。手术前，护士长不允许把任何东西带入手术准备室，甚至是我的一片纸。所以我快速地把这个定理记下来，等着麻醉师的到来，我努力在我失去知觉之前在脑子里证明它。不为别的，至少它可以帮助我克服手术前常有的紧张情绪，事实证明（如果必要的话）数学有时在这方面做得更好。

[6] 参考范德瓦尔登的 *Science Awakening: Egyptian, Babylonian and Greek Mathematics* (John Wiley, 1963), pp.228 和 277。

[7] 关于完全依赖于比例关系的其他证明（例如，海伦自己的证明），可以参考 Heilbron，《几何文明》，pp.269-271。

[8] Carl B. Boyer，*History of Analytic Geometry: Its Development from the Pyramids to the Heroic Age*(Scholar's Bookshelf, 1988), pp.168-170。引用 Boyer 的话，"这可能是第一次这些定理（本章给出的定理以及三维空间的相应定理）在出版物中出现。所以，可以推断它们属于克莱洛，当然有待以后有证据证明。"然而，他又说，克莱洛的贡献不应该被夸大："毕竟，这个距离公式显然是四千年前巴比伦人就已知道的以毕达哥拉斯命名的古老定理的解析表示。毫无疑问，最早的分析几何学家，如笛卡儿和费马，已经知道它们的等价形式。"

[9] 我喜欢使用"长方形的盒子"而不是略显陈旧且拗口的"平行六角形(parallelepiped)"。

[10] 来源文献：*Mathematical Adventures for Students and Amateurs*, David F.Hayes 和 Tatiana Shubin 编辑（美国数学学会，2004），p.62。

[11] 法国数学家达蒙丹 · 查尔斯 · 汀斯尤（1748—1822）于 1774 年把这一结果推广到任意三维图形：任意平面表面的面积的平方等于这个表面在三个相互垂直的坐标平面的投影平面面积的平方和。笛卡儿已经知道这一结论在四面体的特殊情况下成立。参阅 Boyer 的 *History of Analytic Geometry*, p.207。

[12] 为了简单起见，我们这里忽视了倍伴音相对于基音的相位，这些相位一般不影响这个音的音色。

补充 7　毕达哥拉斯的珍品

在《毕达哥拉斯命题》一书的结尾，卢米斯介绍了他称之为“毕达哥拉斯的珍品”的一系列结果。[1]从直角三角形 *ABC* 出发（图 S7-1），在直角边 a 和 b 及斜边 c 上构建正方形 *BMNC*、*CDEA* 和 *AHIB*。作 *EH*、*IM* 和 *ND*，并在这些边上构建正方形 *EFGH*、*IKLM* 和 *NPQD*。最后，连接 *LP*、*QF* 和 *GK*，并延长它们相交于 *A′*、*B′*和 *C′*。于是我们有下面的关系，这里不加以证明地给出下面的陈述。为了简化我们的记法，等号表示两条线段、三角形或正方形等有相同的大小（长度或面积）；符号//

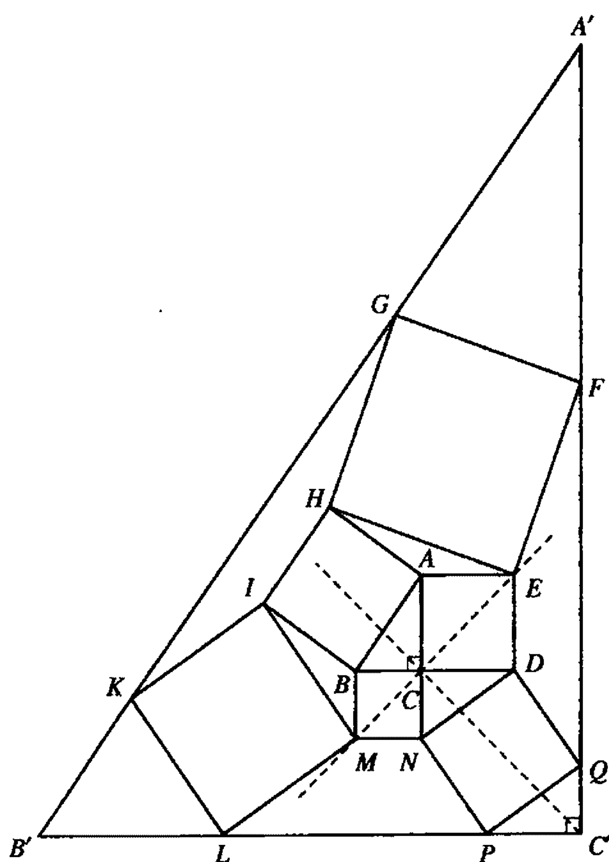


图 S7-1　毕达哥拉斯珍品

和⊥分别表示两条直线平行或垂直，而符号∽表示相似。

1. 正方形 $AHIB$ = 正方形 $BMNC$ + 正方形 $CDEA$（欧几里得I 47）。
2. $\triangle AEH = \triangle BIM = \triangle CND = \triangle CAB$。
3. $LP /\!/ BC$，$QF /\!/ CA$，$GK /\!/ AB$。因此，$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$。
4. $LP = 4BC = 4a$，$QF = 4CA = 4b$，且 $GK = 4AB = 4c$。
5. 梯形 $LPNM$ = 梯形 $QFED$ = 梯形 $GKIH = 5\triangle ABC$。
6. 正方形 $EFGH$ + 正方形 $IKLM$ = 5 正方形 $NPQD$ = 5 正方形 $AHIB$。
7. 直线 $C'C$ 平分直角 C' 和 C。因此，$C'C \perp ME$。

   （注意，ME 是整个结构的对称轴。）
8. GK 上的正方形 = LP 上的正方形 + QF 上的正方形（这些正方形没有在图上显示出来）。

卢米斯称这8个关系是“可论证的真理”，他还增加了第9条，即只简单说“等等”，暗示还可以找到更多的关系。例如，$\triangle A'B'C'$ 的边和 $\triangle ABC$ 的边的比是 $2(a+b)^2/ab$。因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似且朝向相同，整个构造过程是以 $\triangle A'B'C'$ 取代 $\triangle ABC$，可以类似无限地作下去，从而创建出更大的三角形，以及相应的正方形和梯形。相当地奇妙！

注释和参考文献

[1] 卢米斯，pp.252-253。他是在约翰·沃特豪斯的笔记本上找到这个奇特图形的，沃特豪斯是纽约的一名工程师。这一奇怪的图形出现在1899年6月的纽约报纸上。

补充 8　滥用的例子

> 这完全是观察角度的问题。
>
> ——俗语

我很少注意报纸上的广告，但是 2003 年 10 月 18 日的《纽约时报》上的一则广告却吸引了我的眼球（图 S8-1）。不，不是 Bob、Mary 和 Jack 的故事，而是它上面的矩形，请读者求出它的面积，并解释是如何求到的。

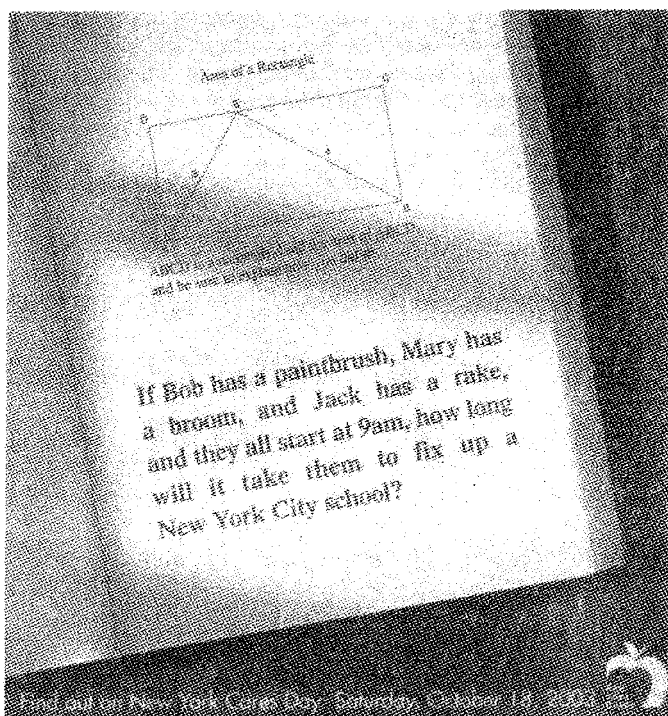


图 S8-1　《纽约时报》上的一则广告

在你尝试解决这个问题之前，我要指出的是，这里有一条至关重要的信息没有给出：两条斜线之间的夹角。看起来这两条线形成的是直角，但是这里没有说，也没有这样的信息，这个问题是不可解的。所以，没

有办法，我只能假设这两条直线形成 90°角，然后采用一个很显然的办法：这个矩形的面积等于它的底乘以高。所以，我先求它的底的长度，利用毕达哥拉斯定理，这个长度是 5；接下来需要求高，我称其为 h。分别用 x 和 y 表示线段 DE 和 EC，于是我们有 $h^2+x^2=3^2=9$ 和 $h^2+y^2=4^2=16$。第二个等式减去第一个等式，得到 $y^2-x^2=7$。$y^2-x^2=(y+x)(y-x)$，而 $y+x$ 是底的长度，我们已经知道这个长度是 5，所以 $5(y-x)=7$，即 $y-x=7/5$。解方程组 $y+x=5$ 和 $y-x=7/5$，我们得到 $x=9/5$ 及 $y=16/5$，根据任意一个结果都可以求出 $h=12/5$。所以，要求的面积是 $5\times(12/5)=12$。

无论按什么标准，这都不是一种优雅的解决方案，而是硬算的方法。然而，当我偶然微倾这幅图，一个更简单的解法跃然纸上。从 E 作 AB 的垂线，与 AB 相交于 F 点（参阅图 S8-2）。三角形 ADE 和 AFE 是全等的，因此有相同的面积；三角形 BCE 和三角形 BFE 也是如此。 这四个三角形组成一个矩形。但是三角形 AFE 和三角形 BFE 加起来等于三角形 AEB，而三角形 AEB 的面积是$(3\times4)/2=6$（把 AE 看成底，BE 是高）。所以，这个矩形面积是这个三角形面积的 2 倍，即 12。万岁！

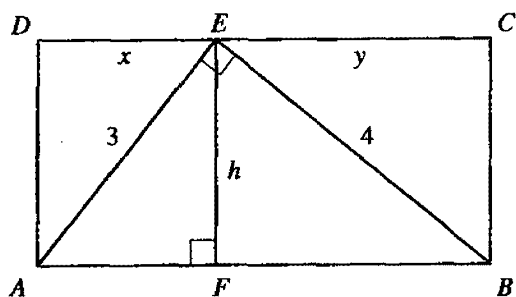


图 S8-2　更简单的解

这让我想起了一个朋友曾经讲过的故事。多年前，当他还是一名学生时，曾尝试证明几何的某个定理。他长时间、紧紧盯着摆在面前的纸上的图形，努力寻找由点线组成的复杂排列中的规律，但是毫无结果。这时，一阵轻风从窗外吹进来，把纸吹落到地板上，这张纸翻了过来。

霎那间，证明方法闪现在他眼前！仅仅是观察角度的变化就可以使一个难于求解的问题变得很容易了。[1]

注释和参考文献

[1] 可惜我的朋友不记得他多年前努力证明的这个几何定理是什么了。

第 10 章

奇怪的坐标系

> 一根长 0;30 的杆子靠墙立着。上端下滑的距离是 0;6，底部移动了多少？
>
> ——BM 85 196（巴比伦的教科书，大约公元前 1800 年）

如果给你一个等式$\alpha^2+\beta^2=1$，你也许会马上认为它是单位圆的直角坐标方程。它的确是单位圆，但不是在直角坐标之下。

19 世纪初，主流数学主要涉及两个课题。微积分在欧洲大陆开始普及，而且被运用到常微分方程和偏微分方程、复变函数论、周期函数分析以及数学物理等新领域。在英国，随着 1830 年抽象代数的诞生，自 1727 年牛顿逝后的一个世纪的消沉终于结束了，抽象代数不久将完全改变数学的本质。与这些主流的数学分支相比，几何则被归类为边缘学科。人们有这样一种感觉，再没有什么可以纳入两千年前希腊人建立起来的体系中。另外，1637 年，笛卡儿发明的分析几何（或称为坐标几何）也已经改变了几何学的本质，有效地把几何与代数统一起来。再不需要直尺或圆规这些经典的工具来解决几何问题，取而代之的是用现代的方程来解决几何问题。如果某个证明需要依靠分析几何的力量，那么可以使用微积分给出充分的证明，而微积分的基础就是依赖于对直线、曲线或几何面的代数描述，因此当下把这两门学科作为一门课程教授给学生（至少美国大学是这样做的）。

当然几何也并非完全停滞不前。以法国和德国为主的少数几何学家重新对综合几何或“纯”几何产生了兴趣，纯几何沿袭欧几里得的推理论证方法。欧几里得作图的基本工具是直尺（没有标记的尺子）和圆规。只利用这些工具，他们就构造出成百上千的图形，其中有一些相当复杂，这把几何作图提升到一门艺术的层次。

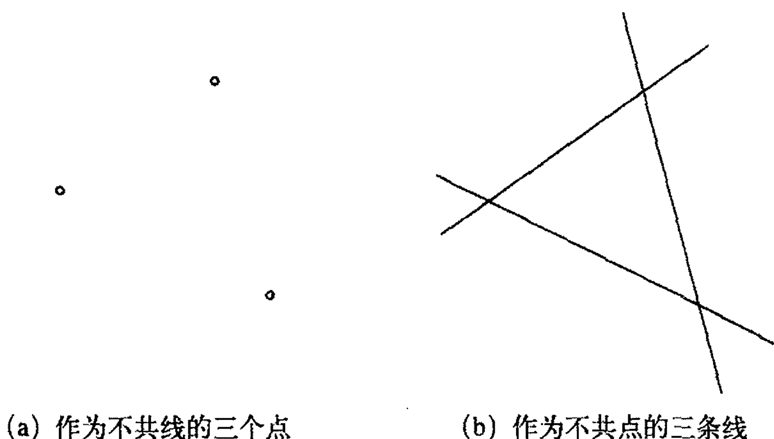
然而，当面对的是正多边形时，直尺和圆规的力量似乎受到了限制：当时，使用直尺和圆规能构造出的正多边形只有正三边形、四边形、五边形和十五边形，以及通过对这些正多边形的边数加倍后所得的正多边形。因此，当1796年年仅18岁的高斯（1777—1855）证明了可以用欧几里得工具构造七十六边形时，人们完全被震惊了。令人感动的是，年轻的高斯因为这一发现决定将自己的一生投入数学，而放弃了之前所喜爱的语言学，不久后成为19世纪前半叶的数学领袖。高斯被认为是与阿基米德和牛顿并驾齐驱的人物，是整个时代三个最伟大的数学家之一。在他的故乡，德国的不伦瑞克，矗立在七十六边形基台上的高斯雕像表达了人们对他的纪念。[1]

仅仅一年之后，又发生了另外一件令人震惊的事情。意大利几何学家和诗人马歇罗尼（1750—1800）于1797年证明了每一个能用圆规直尺构造出来的图形都能够只用圆规完成：根本不需要直尺。（当然，我们不能用圆规画直线，但是我们可以用圆规确定两个圆相交的两点，因为两点确定唯一一条直线，所以可以认为它们代表直线。）[2]

高斯和马歇罗尼的发现，说明已经非常古老的经典几何还远没有穷尽。事实上，经过一个世纪，完全不同于欧几里得几何的另一个几何分支——射影几何出现了。这门优美而神秘的学科起源于16世纪，当时人们对研究投影这门艺术有着浓厚的兴趣。有一位艺术家在一块画布上描

绘了一个场景，其中有些现象引起人们的注意，例如，物体的形状或它们的相对大小出现了扭曲，而其他性质却没有变化。对于那些没有变化的部分，我们可以考虑一条直线上的三个点，它们在画布上的像始终位于一条线上，当然，这是假设这位艺术家遵循投影法则。射影几何是用数学语言研究当图形被投射到画布时那些保持不变的性质。从强调图形的度量性质（线段长度、两条直线间的夹角，或者多边形面积）到关注关联性质（点、线和平面间的相对位置），这种转变是不同于已有两千年的欧几里得几何的重要标志。[3]

射影几何的核心是对偶的概念：实际上，在考虑关联性的前提下，平面上的点和线之间存在完全对等的关系（空间中的点和面之间也是如此）。例如，考虑这样的陈述：两点唯一确定直线。如果交换这一陈述中的“点”和“线”的位置，那么这一陈述就变成：两条线唯一确定一个点。[4]根据对偶原理，对于任意关于点和线的相互位置的正确陈述，如果将“点”和“线”互换，结论仍然正确。例如，我们可以认为三角形是不共线的三个点的集合，也可以认为是不共点的三条线（三条直线不相交于同一点）的集合，如图 10-1 所示。前面的陈述是更加通用的陈



(a) 作为不共线的三个点　　(b) 作为不共点的三条线

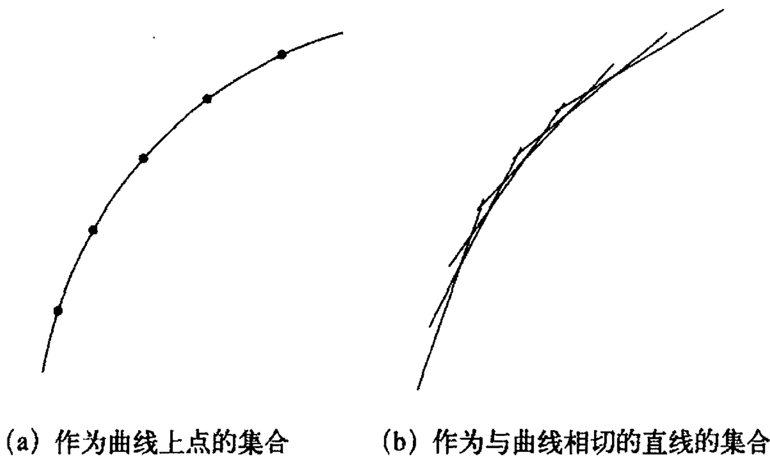
图 10-1　三角形的对偶视图

述，但后者也同样正确。（当然，我们必须认为直线是可以无限延长的，这使得这个三角形的样子有点奇怪。）



对偶原理是数学中最巧妙的概念，因为它能够把两个看似不相关的陈述统一起来。事实上，在较老的几何书中，你都可以找到这样的几页，它们被竖线整齐分隔，这条线的两侧，一边是一个陈述，另一边是这个陈述的对偶陈述。但是，要获得这种巧妙性是要付出代价的：像两点间距离、两条相交直线的夹角或者是封闭图形的面积这些可以赋予数值的常用概念，在射影几何中却没有一席之地，其中包括毕达哥拉斯定理。

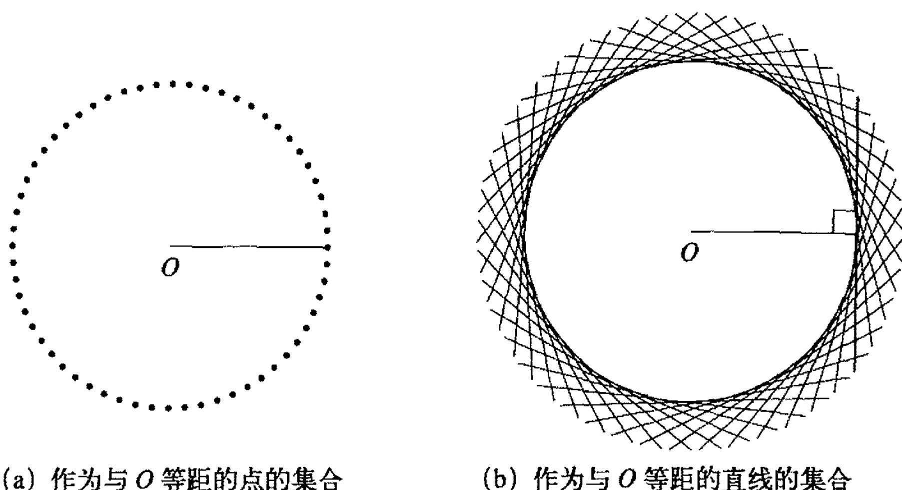
或者说，至少1828年之前是这样的。那一年，德国数学家尤里乌斯·普吕克（1801—1868）冲破了最后的防线，把对偶原理发挥到了极致。他认为如果点和直线是完全对等的，那么为什么不能同点一样把直线用于构造曲线呢。就像可以认为曲线是有特定性质的点的轨迹一样，我们也可以认为曲线是与它相切的切线的轨迹（图10-2）。在这种解释之下，曲线就是它的切线包迹。例如，我们通常都认为圆是与圆心等距离



（a）作为曲线上点的集合　　（b）作为与曲线相切的直线的集合

图10-2　曲线的对偶视图

的所有点的集合，但是我们还可以认为它是与圆心等距离的所有切线的集合（图 10-3）。虽然第一种解释更容易以几何的形式构造出来（只需要圆规），但第二种解释同样是正确的。



（a）作为与 O 等距的点的集合　　（b）作为与 O 等距的直线的集合

图 10-3　圆的对偶视图

普吕克又继续往前走了一步：他通过引入一种他称为线坐标的新型坐标，给了这种想法一种分析公式。从 xy 平面上的直线方程 $Ax+By = C$ 出发，其中 A 和 B 都不等于 0。只要 $C\neq 0$（即只要这条直线不经过原点），我们就可以用 C 除以这个方程，得到

$$\alpha x+\beta y=1 \tag{1}$$

其中，$\alpha = A/C$，$\beta = B/C$。这个方程关于x和y完全对称，而且关于α和β同样完全对称，普吕克被这样的对称性震惊了。我们通常认为α和β是常数，x和y是变量。于是方程(1)描述了由常量（α, β）所确定的直线上的所有点。因为这些常量确定唯一一条直线，所以我们可以认定它们是这条直线的（固定）坐标，并把它记作$l(\alpha, \beta)$。但是，基于方程(1)中变量（x, y）和常量（α, β）之间完全对称的观点，我们可以互换它们之间的角色，认为（x, y）是固定的，而（α, β）是变量。于是，方

程(1)描述了通过固定点$P(x, y)$的所有直线$l(\alpha, \beta)$。重述如下：方程(1)可以解释为固定坐标为（α, β）的一条直线l的方程，也可以解释为固定坐标为（x, y）的点P的方程。图10-4给出了这一方程的对偶解释。

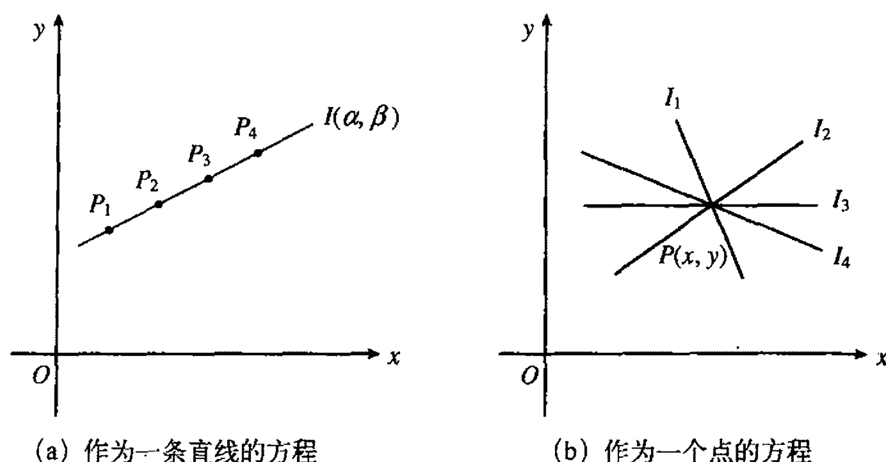


图 10-4 $\alpha x+\beta y=1$ 的对偶解释

然而，为了达到点和线之间的完全对偶，我们必须要问是否能给线坐标（α, β）赋予一种几何意义，就像点坐标（x, y）表示点 P 到 y 轴和 x 轴的距离一样。这样的解释的确存在。在方程（1）中设 $y = 0$，我们得到 $x = 1/\alpha$；同样，设 $x = 0$，我们得到 $y = 1/\beta$。但是如此求得的 x 和 y 的值分别是这条直线与 x 轴和 y 轴的截距 m 和 n，所以

$$\alpha = 1/m, \ \beta = 1/n \tag{2}$$

因此，可以把线坐标看成是相对于坐标轴对应截距的倒数（图 10-5）。



初看起来，线坐标看似一个很奇怪的结构，但是我们应该认识到，任何一个坐标系的目标是唯一确定坐标系上对象的位置，并且能够用最简单的方法做到这一点，无论这些对象是点、线还是其他几何实体。第

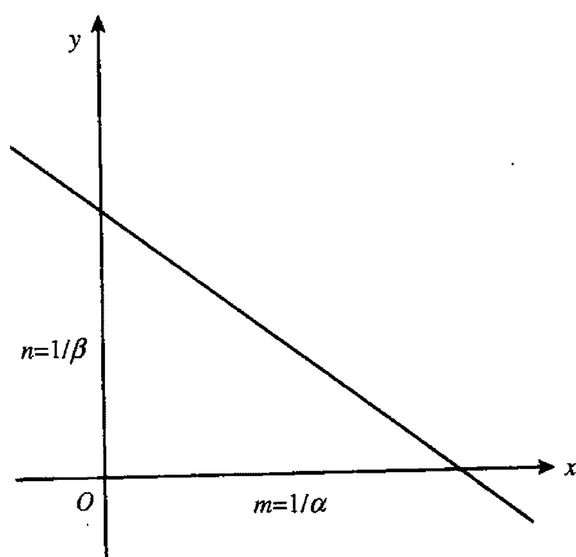


图 10-5　线坐标

一次遇到极坐标时，我们看它会觉得奇怪，但是很多情况下，它比普通的（笛卡儿）直角坐标更优越：想象一下空中交通管制装置用飞机到控制塔的距离和方向在雷达显示屏上定位飞机的情形。另外，用极坐标代替直角坐标来表示曲线方程时，曲线方程经常会变得简单得多。例如，在直角坐标，单位圆的方程是 $x^2+y^2=1$，而它的极坐标方程是 $r=1$。

为了强调这一点，我们来看一个确实需要使用线坐标的情况。一个长度为 1 的梯子斜靠在墙上，它的底端可以在沿垂直于墙面的地板上自由滑动。当我们考虑梯子的所有可能位置时，它所占据的区域的形状是什么样子的呢？参照图 10-6，设 m 是梯子底端到墙的距离，n 是其上端距离地板的高度。当底端滑离墙面时，梯子慢慢地在 xy 平面内转动，记录与它总是相切的曲线。我们的目标是求这条曲线的方程。

根据毕达哥拉斯定理，不管梯子的位置如何，方程 $m^2+n^2=1$ 总成立。但是，m 和 n 是与这条曲线相切的切线的截距，所以，我们有 $m=1/\alpha$,

$n = 1/\beta$，其中α和β是这条切线的线坐标。把上面的结果代入到 $m^2+n^2=1$ 中，我们得到

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=1 \tag{3}$$

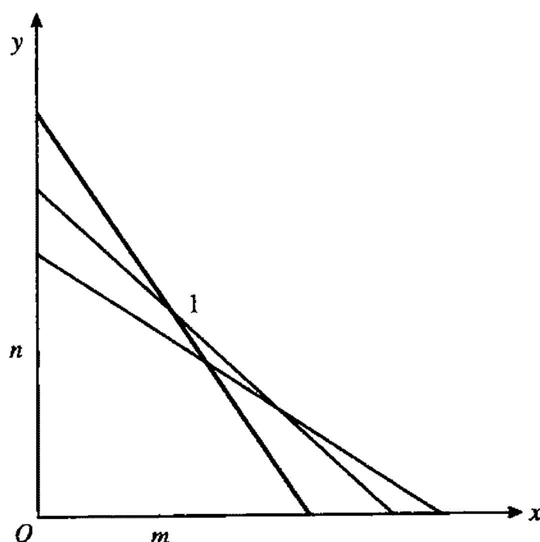


图 10-6 滑动的梯子

当我们考虑梯子的所有可能位置时，根据方程(3)，每一条切线由它的线坐标（α, β）决定。因此，方程(3)就是要求的曲线方程。这个方程完全确定这条曲线，所以它是我们要解决的问题的解。

然而，由于我们习惯于考虑直角坐标，即“点”坐标，所以大多数人还是对这一解答感到别扭。我们能不能将方程（3）变成直角坐标（“点”坐标）方程呢？（为避免可能的误解，我们强调 $m^2+n^2=1$ 不是要求的方程，因为 m 和 n 不是曲线上点的坐标。）上面问题的答案是肯定的，但是这个过程有些麻烦，需要一些微积分的知识，所以我把它放到了附录 G 中。最后的方程是

$$x^{2/3}+y^{2/3}=1 \tag{4}$$

这个方程的图形是我们在第 7 章中遇到的星状图螺旋线。[5]



这个例子的一个结果，是我喜欢称之为“搬运工难题”的下面这个问题。搬家公司需要把一个长长的物体，比如一个长度为 a 的沙发运过一个 L 形的走廊（图 10-7)。沙发能否通过走廊呢？假设我们选择外侧的两面墙为 x 和 y 轴，而这两条走廊的宽度分别为 p 和 q，于是，内侧墙面的拐角的坐标是 (p, q)。如果这个沙发比较短，那么绕过这个角是没有问题的。但是如果它太长，那么就可能被卡住。当这个沙发绕着这个拐角变化位置时，它实际是沿着由方程 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ [6]给出的螺线移动。沙发会碰到这条螺线所覆盖区域内的任意一点 (x, y)，而这个区域外面的任意点都是安全的。因此，为了使沙发顺利地通过这一拐角，我们必须使得 $p^{2/3}+q^{2/3}\geqslant a^{2/3}$。在 $p=q$（走廊的两个拐角宽度相同）的特殊情况下，这一条件退化成 $2p^{2/3}\geqslant a^{2/3}$，由此我们可得 $p\geqslant a/\sqrt{8}\approx 0.35a$；如果这个走廊更窄，则沙发就会被卡住。这还表明这两个拐角必须至少相隔 $p\sqrt{2}=a/2$。[7]

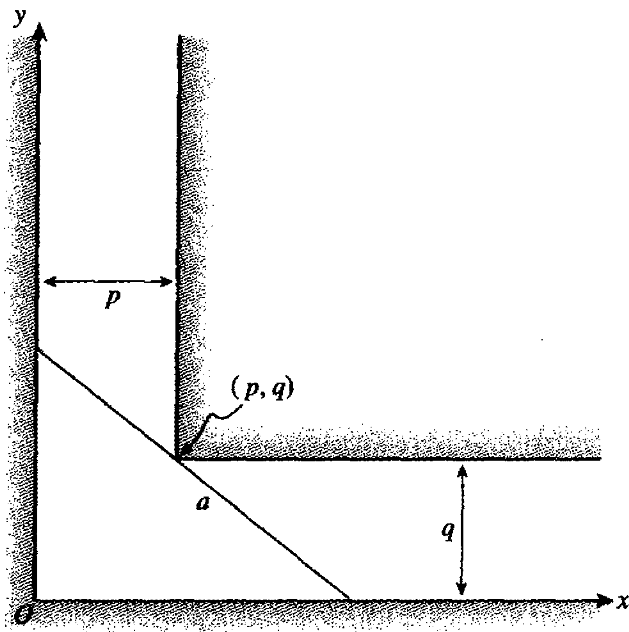


图 10-7　搬运工的挑战：沙发如何通过拐角



在本章一开始，我就提到了方程$\alpha^2+\beta^2=1$。已知α和β代表线坐标，我们自然希望知道这个方程代表什么样的曲线。答案是这个方程代表单位圆，是由它的切线生成的单位圆。为了说明这一点，回想一下第 9 章的内容，在任意的直角三角形中，从直角到斜边的垂线长度 d 满足 $1/d^2=1/a^2+1/b^2$。参照图 10-8，从原点到切线的垂直距离记为 p，于是我们有

$$1/p^2=1/m^2+1/n^2 \tag{5}$$

其中，m 和 n 分别是这条切线在 x 轴和 y 轴上的截距。用 $1/\alpha^2$ 和 $1/\beta^2$ 分别取代 m 和 n，并对单位圆设 $p=1$，我们得到$\alpha^2+\beta^2=1$，这就是单位圆的线方程。

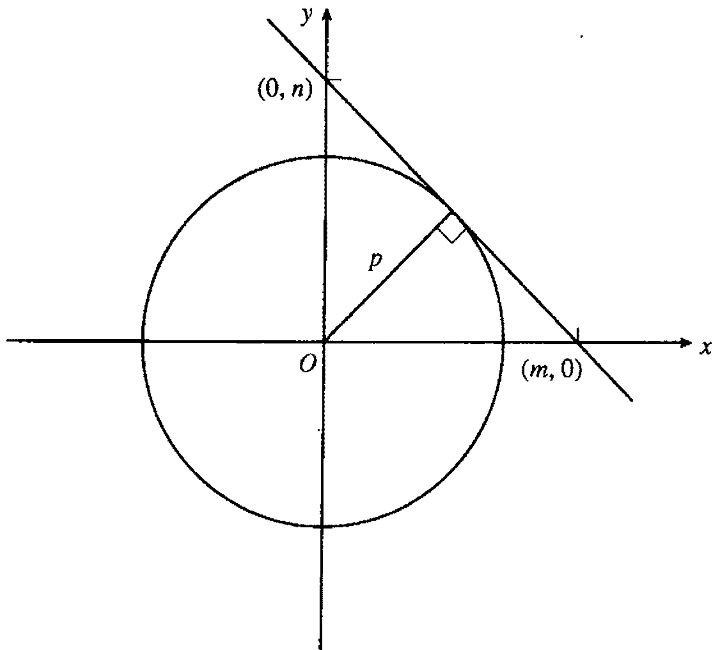


图 10-8 方程$\alpha^2+\beta^2=1$的推导



普吕克的线坐标是对偶性在数学中发挥作用的一个很好的例子。可

惜的是，今天，它们几乎被遗忘了。但是，在线条设计这一艺术领域它们得到某种程度的复苏，所谓线条设计就是完全根据定位尺旋转直线而生成的几何图案（参看图 10-9）。[8]至于普吕克，他的生涯发生了出乎意料的转折。在出版了反映其思想的主要著作《分析几何的发展》（共有两卷，分别在 1828 年和 1831 年出版）之后，他突然放弃了数学，转向研究实验物理。在 1846~1864 年的大约 18 年间，他都致力于研究晶体的磁性质，这对制造新的标准温度计很有帮助，他还研究了气体光谱线，这门学科不久成为了天体物理学的核心部分。然后他又突然回到了之前至爱的学科，用他生命的最后四年继续研究线坐标。他于 1868 年去世，享年 67 岁。令人遗憾的是，他的名字和著作已经从今天的几何课程中消失了。

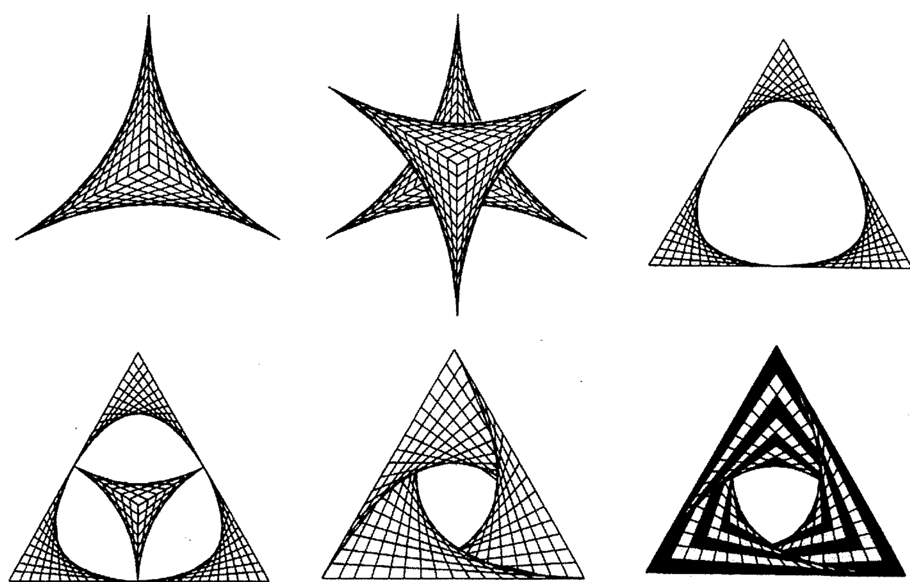


图 10-9　线条设计

注释和参考文献

注：范德瓦尔登在他的 *Science Awakening:Egyptian, Babylonian and Greek*

Mathematics (John Wiley, 1963), p.76 中引用了这段铭文。这些数是 60 进制的数。这段文献也证明了巴比伦人至少在毕达哥拉斯之前一千年就知道了毕达哥拉斯定理。

[1] 高斯实际上又往前走了一步。他证明：对于有素数条边的正多边形，如果这个素数有 $N = 2^{2^n}+1$ 的形式，其中 n 是非负整数，那么可以用直尺和圆规构造出这个多边形。当 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 时，我们得到 $N = 3$，5，17，258，65，537，这些都是素数。

形如 $2^{2^n}+1$ 的素数称为费马素数。1654 年，皮埃尔和费马推测 $2^{2^n}+1$ 对于每一个非负整数都是素数，但是到了 1732 年，这一结果被推翻了，欧拉证明当 $n = 5$ 时我们得到一个合数 $4294967297 = 641\times6700417$。至今仍不知道是否存在其他费马素数，因此，也可能存在还没有发现的正多边形，它们可以用欧几里得工具构造出来。然而，如果存在这样的多边形，它们边的数量很大，使得任何实际构造都不可能。

1837 年，皮埃尔（1814—1848）证明费马素数是能够作图的唯一素数，因此高斯的条件是充分且必要的。

[2] 1928 年，丹麦数学家叶尔姆斯列夫（1873—1950）的一个学生在哥本哈根的一家书店发现了一本名为《欧几里得 · 丹麦本》的书，这本书是由一位不出名的德国几何学家摩尔（1640—1697）于 1672 年出版的，他惊讶地发现在这本书里有马歇罗尼结果的完整证明，而这本书写于马歇罗尼之前的 125 年。关于马歇罗尼作图的更多内容可以参阅 Richard Courant 和 Herbert Robbins 的《什么是数学》（牛津大学出版社，1996），pp.147-152。

[3] 关于射影几何的优秀介绍，请看上面所说的参考书，第 4 章。

[4] 如果直线平行，则它们在无穷远处“相交”。把无穷远点和无穷远线（也称为理想点和理想线）看作常规几何对象是射影几何的核心原则，参见《无穷之旅：关于无穷的文化史》，第 15 章。

[5] 螺线还有很多其他有趣的性质。参阅《三角之美》pp.98-99, 100-101, 106。还可以参考 Robert C.Yates, *Curves and Their Properties*（全美数学教师协会，1974），pp.1-3。更多关于方程的内容，可以参考我的文章“Line Equations of Curves: Duality in Analytic Geometry”，*International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 卷 2，no.3(1978)，本章部分内容摘自该文章。

[6] 这是方程 $x^{2/3}+y^{2/3} = 1$ 的一般形式，其生成棒的长度是 a 而不是 1。与单位圆的方程 $x^2+y^2 = 1$ 相比，它与圆心为 O、半径为 a 的圆方程 $x^2+y^2 = a^2$ 对应。

[7] 我们简单地假设这个问题是二维的，所以沙发不能向垂直方向倾斜。这个问题也许应该编入 Edwin A.Abbott 的 1884 年的经典科幻故事 *Flatland: A Romance of Many Dimensions* （普林斯顿大学出版社，2005）。

[8] 例如，可以参考 Dale Seymour，Linda Silvey 和 Joyce Snider 的 *Line Designs* (Creative Publications, 1974)。

第11章

符号，符号，还是符号

> 无论你对数学家说什么，他们都把它翻译成自己的语言，于是它立即成为完全不同的东西。
>
> ——约翰·沃尔夫冈·歌德（1749—1832）

数学和音乐有很多共同之处，其中最大的共同之处就是它们对良好符号系统的信赖。古人完全依赖于“如此这般”的指令：把两个已知数相乘，演奏两个特殊的音符，等等。无需说，这样的口头指令意义含混且没有效率。特别是在数学中，良好符号系统的缺乏阻碍了希腊向算术和几何之外的领域进军。

大约花了1000年，数学才完成口头语言到文字代数的转变，在文字代数中，字母和符号取代了口头指令。这种转变始于14世纪，并在大约1600年趋于成熟。当时韦达引入了一种符号系统，在这一系统之下，辅音代表已知量，元音代表未知量（参见第6章）。使用字母表示代数量的想法对于今天的我们来说再自然不过，但是在他的时代却很新奇，它极大地推动了数学描述的公式化。但是，可能是因为这项如此大胆的发明令他自己也感到迷惑，所以韦达并没有极力推广它。尽管他使用现代符号+和−表示加法和减法，但是却用 aequatur 表示相等，*A* quadratus 和 *A* cubus 分别表示 a^2 和 a^3（后来他又把这些符号缩写成 *Aq* 和 *Ac*）。对于方程 $a^2+b^2=c^2$，他写成 *Aq*+*Bq* aequatur *Cq*，还远不如我们现在的记法简练，

但是已经开始接近了。

因为有了笛卡儿，向符号代数的转变才得以完善。（有趣的是，牛顿生活在笛卡儿之后半个世纪，他却仍然用 aa 表示 a^2，但是对于更高的幂，他却使用我们现代的指数记法。）然而，不久，数学发现的日益加快之势要求新符号和新规则来规范这些发现。1843 年，爱尔兰数学家罗恩 · 哈密尔顿（1805—1865）在设法把普通的复数扩展到三维空间的过程中，发明了*四元数*，按照我们所熟悉的算术规则是可以把抽象的对象相加或相减的，但是它不满足乘法交换律 $ab = ba$。四元数的形式表达式是 $q = a + bi + cj + dk$，其中 4 个单位四元数 1，i，j，k 满足下面的乘法法则 $i \times j = -j \times i = k$，$j \times k = -k \times j = i$，$k \times i = -i \times k = j$，$i^2 = j^2 = k^2 = i \times j \times k = -1$。每一个四元数都有一个大小或称绝对值 $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$。这个表达式可以解释为这个四元数到原点的距离，因此它满足四维空间的毕达哥拉斯定理。

据说，哈密尔顿是在他的家乡都柏林的布鲁穆桥散步时，突然发现了四元数的乘法法则，这座桥上刻有一段文字记录了这一事件（图 11-1）。这一事件标志着抽象代数的开始，是对数学不只局限于描述诸如数或几何量等“实”物的一种认识。相反，数学能够扩展到任意的结构，服从于操作的形式规则，只要这些规则不自相矛盾。

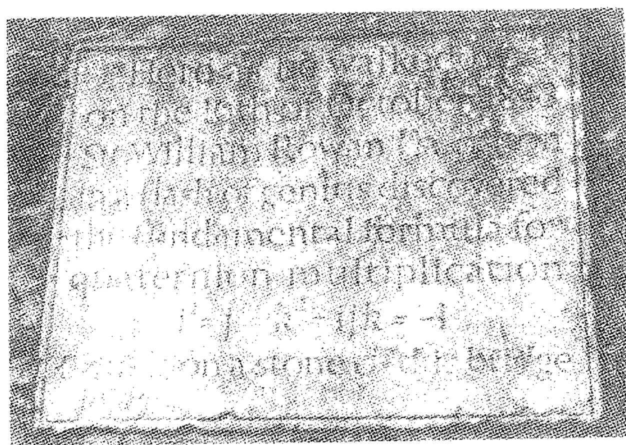


图 11-1　都柏林的布鲁穆桥上的铭文

虽然四元数看起来很巧妙，但是，由于需要4个成分表示三维空间，用起来不很方便。不久，它们被一种新概念取代，这个概念就是向量，主要由美国物理学家吉布斯（1839—1903）发明。如最初构想的那样，向量代表一个有大小和方向的物理量，我们熟悉的物理量有力和速度。不久，这一具体的描述被有向线段的想法取代，并简单记作 PQ。这一简练的记法满足简单法则 $PQ=-QP$ 及 $PQ+QR=PR$，而第二个表达式表达了这样事实：如果你从点 P 前进到点 Q 再前进到点 R，那么这一结果相当于你直接从 P 到 R。为了使这一系统更完备，我们定义零向量为从点 P 到其自身的向量，即 $\mathbf{0}=PP$；于是，我们有 $PQ+QP=PP=\mathbf{0}$。这些法则使得我们能够把向量当作纯代数对象去处理，而不考虑它可能代表的物理量。

经年累月，若干向量记法演化成熟，一直沿用至今，有时也会产生混淆的情况。我们可以看到这样的记法 $\overrightarrow{PQ}$，它表示从 P 到 Q 的线段，尽管这个小箭头是多余的：PQ 的字母顺序已经清楚地表明这个向量是从 P 到 Q 的。我们经常使用单个黑体小写字母表示向量，如 $\mathbf{a}=PQ$。为了表示向量的大小，我们使用绝对值符号，如 $|PQ|$；或者，如果用 $\mathbf{a}$ 表示向量，那么使用这个字母的普通体（非黑体）表示它的大小。零向量写作 $\mathbf{0}$，显然 $|\mathbf{0}|=0$。

法则 $PQ+QP=PR$ 就是我们熟悉的向量加法的三角形法则（也称为平行四边形法则；参见图11-2）。然而，请注意，这一法则并不适用于向量的大小。两点之间的最短距离是连接它们的直线段，所以，如果你希望从 P 到 R，但是却要以点 Q 作为中间停留站，那么这一绕道而行可能拖长你的旅程（除非 Q 恰好在直线段 PR 上）。翻译成向量语言，这表明 $|PQ|+|QP|\geqslant|PR|$；而且，因为 PR 是向量 PQ 和 QR 的向量和，所以我们有三角不等式

$$|PQ|+|QR| \geqslant |PQ+QR|$$

这是一个重要的关系式，一般从右到左书写；采用黑体表示，它写作

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}| \tag{1}$$

这个不等式中的等号成立，当且仅当向量 **a** 和 **b** 在同一直线上且有相同的方向。

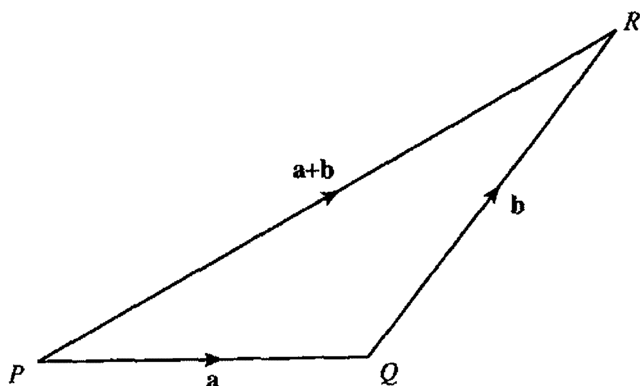


图 11-2　向量加法

当两个向量 **a** 和 **b** 正交时，它们的和 **a+b** 就是直角三角形的斜边，其直角边是 **a** 和 **b**（图 11-3）。于是，毕达哥拉斯定理说

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2 \tag{2}$$

不要把上面的公式与我们熟悉的初等代数等式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$混淆。

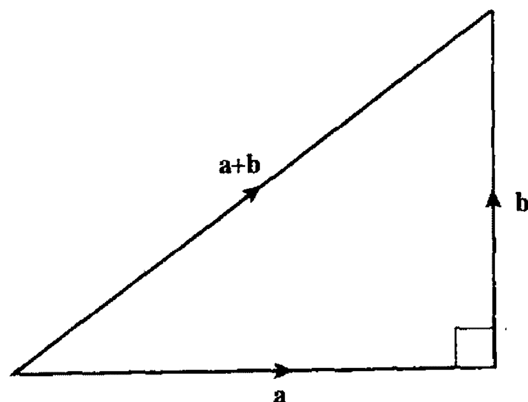


图 11-3　两个直交向量的和

如果一个向量的起始点在原点 O 而它的终点在点 P，那么我们称这个向量是点 P 的半径向量，表示为 $\mathbf{r}$，即 $\mathbf{r}=OP$。在二维空间，设点 P 的直角坐标是（x，y）；于是我们可以把 $\mathbf{r}$ 写成它的分量的线性组合，$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$，其中，$\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 分别是沿 x 轴和 y 轴的单位向量（图 11-4）。这种短记法可以进一步缩短写成 $\mathbf{r}=(x, y)$，事实上就是把 P 的半径向量看成点 P 本身。于是，$\mathbf{r}$ 的大小就是点 P 到原点的距离，即 $r=\sqrt{x^2+y^2}$。当然，我们还可以把这个公式扩展到三维空间，此时 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。在下文中我们称这个距离为 $\mathbf{r}$ 的长度。

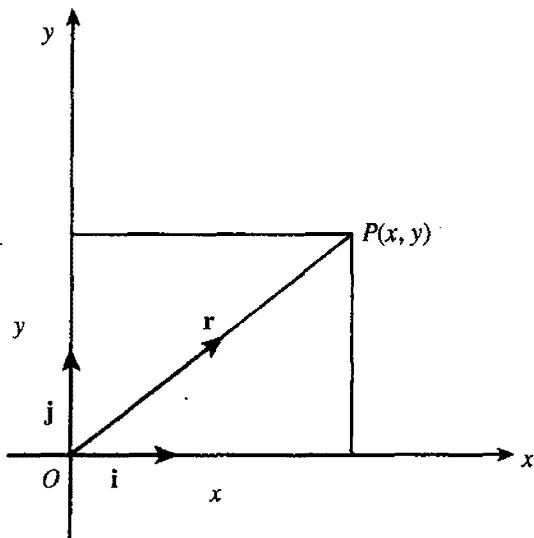


图 11-4　向量及其直角分量

把向量引入数学，极大地促进了各种物理定律的记述。例如，牛顿第二运动定律 $F=ma$ 实际上是作用于质量 m 的力的向量 $\mathbf{F}$ 与这个力引发的加速度 $\mathbf{a}$ 之间的关系：$\mathbf{F}=m\mathbf{a}$。如果我们不使用向量记法，那么我们就必须写出三个方程，力向量和加速度向量的每一个分量需要一个方程（$F_x=ma_x$，对于分量 y 和 z 也一样）。

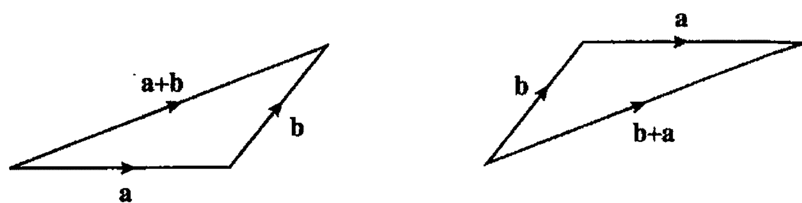
这一记法的最大用途是促使向量代数以及后来的向量微积分，成为物理学中不可或缺的工具。但是，数学家把步子迈得更远：定义 n 个数

的任意有序集合为 n 维空间的向量。这些数的实际意义无关紧要，它们可能是变量、坐标、某个物理量的分量，也可能是纯数，而数组 $(x_1, x_2,\cdots, x_n)$ 本身才是重点。数学家照样说这样的向量的“长度”，即便不把它考虑成多少寸、多少尺这样的真实长短。这样的向量的长度由公式 $\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ 给出；这个公式可以推广到无限维空间 $(x_1, x_2,\cdots)$，只要和 $x^2{}_1+x^2{}_2+\cdots$ 收敛。

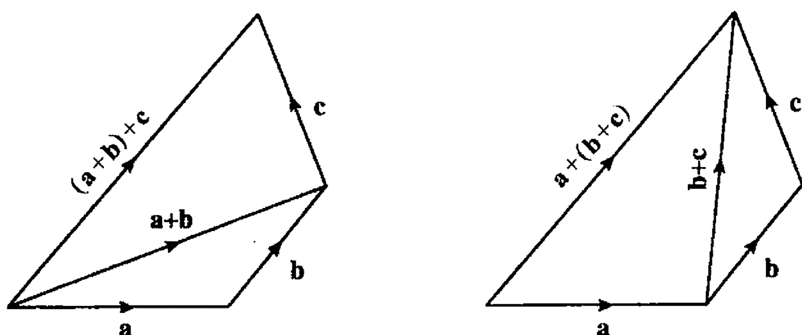
一如数学中以往的情况，引入一个新对象后，我们必须首先建立这些对象的运算法则，或者说游戏规则。对于向量，这些法则都是“自然”的法则：两个向量相等当且仅当它们对应的分量相等，即 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ 当且仅当 $a_i=b_i$，对于所有 $i=1, 2,\cdots, n$ 都成立。两个向量 $\mathbf{a}=(a_1, a_2,\cdots, a_n)$ 和 $\mathbf{b}=(b_1, b_2,\cdots, b_n)$ 的和是向量 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2+,\cdots, a_n+b_n)$。一个数 c（标量）和一个向量 $\mathbf{a}$ 的积是向量 $c\mathbf{a}=(cx_1,\ cx_2,\ \cdots,\ cx_n)$。在几何意义下，刚才说的这个运算就是按比例 $c:1$ 把向量 $\mathbf{a}$“伸长”（如果 $c<0$，则方向与 $\mathbf{a}$ 相反。例如，设 $\mathbf{a}=(2,-3)$，$\mathbf{b}=(3,4)$。那么 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(5,1)$, $7\mathbf{a}=(14,-21)$。这些运算满足我们熟悉的算术法则，特别是满足交换律、结合律和分配律，如图 11-5 所示。

如何做两个向量的乘法呢？我们可以定义两个向量的积，但是结果不是向量而是标量。因此，有时候我们称这个积为标量积，尽管数学家们更喜欢称其为内积或点积。向量 $\mathbf{a}=(a_1, a_2,\cdots, a_n)$、$\mathbf{b}=(b_1, b_2,\cdots, b_n)$ 的点积是数 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$。这个积表示为 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$（因此向量积的名字中有一个“点”）。例如，如果 $\mathbf{a}=(2,-3)$ 且 $\boldsymbol{b}=(3,4)$，那么 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2\times3+(-3)\times4=-6$。使用希腊字母 $\sum$ 来表示和，我们可以把点积写成如下形式：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \tag{3}$$



(a) a+b = b+a



(b) (a+b)+c = a+(b+c)

图 11-5　向量代数

取向量 $\mathbf{a}=(a_1, a_2,\cdots, a_n)$与其自身的积时，我们得到 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}= a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$。这个和就是 a 的长度的平方。因此，我们有向量长度的另一个特征：

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} \tag{4}$$

如果我们把方程(4)的两边平方，并用 a + b 取代 a，我们得到

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2&=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\\&=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|^2+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+|\mathbf{b}|^2\end{aligned} \tag{5}$$

其中，我们利用交换律和分配律打开括号，并合并同类项。现在，假设 a 和 b 相互直交。回想一下方程(2)并把它与方程(5)比较，我们得到 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$。这个结论反过来也成立：如果 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$，那么利用向量代数的语言，向量正交，或成直角。因此

$$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0 \tag{6}$$

（符号 ⇔ 读作“当且仅当”）。因为，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$，所以我们可以把这一陈述写成另外一种形式，

$$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=0 \tag{7}$$

注意，上面的公式与空间的维数无关。例如，设 $\mathbf{a}=(1,\ 2,\ -3)$，$\mathbf{b}=(4,\ 7,\ 6)$。那么 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1\times4+2\times7+(-3)\times6=0$，这表明 **a** 和 **b** 是相互正交的。为了使用传统方式得到同样的结果，我们不得不对距离公式做一些相当麻烦的计算。这表明向量代数的方法优越于传统（非向量）方法。

我们再看一下爱因斯坦，在他早期关于广义相对论的研究中，他设法进一步缩短记法 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$。他认为求和符号是多余的：因为在 $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ 中和的下标 i 出现两次。根据爱因斯坦的规定，只要某项中和下标出现两次，那么这一项就是在相应的范围内求和。在这一规定下，毕达哥拉斯定理变成 $|\mathbf{a}|^2=a_ia_i=a_i^2$。爱因斯坦的规定常被用于数学物理的高级课本中，但是，代数和微积分课本仍然使用求和符号。



你也许认为，到目前为止，描述 $a^2+b^2=c^2$ 的各种说法已经穷尽，但事实不是这样：数学家对概括以往的“具体”概念的胃口似乎永无厌烦之时。我们到此为止的向量是 n 维对象，形如 $(x_1, x_2,\cdots, x_n)$ 的 n 元组。即使我们令 $n\to\infty$，维数也是可数的，因此我们把它与自然数 $1, 2, 3,\cdots$ 对应起来。现在，我们考虑小提琴的琴弦。作为粗略的近似，我们认为小提琴的琴弦是由沿这根弦的长度分配到点 $x_1, x_2,\cdots, x_n$ 上的 n 个质点组成的（图 11-6）。每一个质点沿与 y 轴平行的方向上下振动。我们用 y_i 表示第 i 个质点距平衡位置的偏离，因此产生一个 n 维坐标集合 $(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$，这是 n 维空间中的向量。一旦我们知道这些坐标在每个时

刻的值，那么就确定了这个系统整体的运动状况。

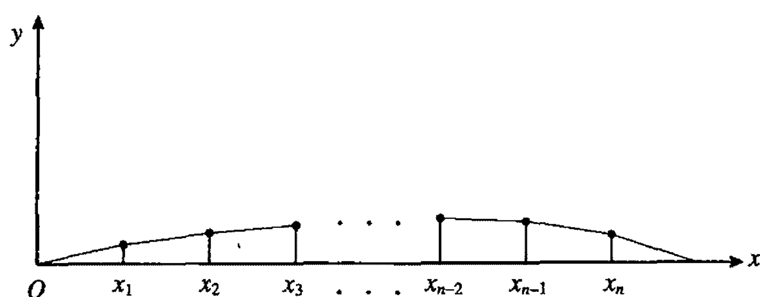


图 11-6　小提琴琴弦的近似

但是，这只能是一种近似，因为真正琴弦的质量是沿着弦长连续分配的。所以不使用 n 个离散的变量（y_1，y_2，…，y_n）。现在，我们使用函数 $y = f(x)$，其中 x 和 y 是连续的变量。我们仍然可以认为 $f(x)$ 是一个向量，但是它的维数不仅是无穷的，而且是不可数的，是无限连续统数。我们可以对这样的向量赋予 n 维向量的所有性质，特别是我们可以确定它的长度。然而，这要求我们把离散和变成连续和，也就是积分。在离散的情况下，我们定义向量 **a** 的长度是 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$，所以，只要平方根下的积分存在，我们就可以定义函数 $f(x)$ 的长度为 $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x}$（其中 a 和 b 是要考虑的区间端点，在这个例子中就是这根弦的长度）。表达式 $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x}$ 称为 $f(x)$ 的模，记为 $\| f(x) \|$，以此来与普通的绝对值记号 $|f(x)|$ 相区分。概述如下：

$$f(x)\text{ 的模} = \| f(x) \| = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x} \tag{8}$$

我们不仅可以把模归为单一函数，还可以归为一个函数集合，即函数空间中的成员，在这个空间中，函数 $f(x)$，$g(x)$，…取代了向量 **a**，**b**，…。

定义在区间$[a, b]$上且满足$\int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x$有限这个条件的空间称为希尔伯特空间，这是以伟大的德国数学家希尔伯特（1862—1943）的名字命名的。[1]希尔伯特空间满足普通向量空间的所有形式规则。对应于点积$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，在希尔伯特空间，我们有两个函数$f(x)$和$g(x)$的内积$(f, g)$，定义为$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$（注意这个定义与方程(3)的定义的类似性，这里积分取代了求和符号）。另外，$f(x)$和$g(x)$必须满足三角不等式

$$\| f(x)+g(x) \| \leqslant \| f(x) \| + \| g(x) \| \tag{9}$$

如果$(f, g) = 0$，就说两个函数是正交的，这就像说两个向量相互直交如果$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$一样。毕达哥拉斯定理也能类似地表示吗？为什么不能呢，完全可以用类似于n维向量空间的方程(2)的形式把它表示出来：

$$\| f(x)+g(x) \|^2 = \| f(x) \|^2 + \| g(x) \|^2 \tag{10}$$

我们甚至可以定义两个函数的“距离”为$\sqrt{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 \mathrm{d}x}$。细心的读者一下就能认出这个表达式与我们熟悉的距离公式$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$是多么的雷同。

起初想来，向量概念如此彻底的一般化也许看起来离现实很远。我们所说的两个函数互相正交是什么意思呢？我们又如何想象“边”为函数的直角三角形呢？每当一个以往的具体概念被扩展到一个新领域的时候，都会有这样的问题出现。这让我们想起，虚数$\sqrt{-1}$第一次出现在数学舞台时关于它的意义的争论。

然而，存在需要这种一般化的情形。我们再一次考虑小提琴的琴弦。正如第 9 章所述，一根琴弦不仅能够以一种模式振动，而且能够以多种模式振动，这些模式的频率是基频的整数倍（图 11-7）。每一种模式都是

一个正弦波，所以我们能用下面这样的函数描述它：$f_n(x) = a_n\sin nx$，$n = 1, 2, 3, \cdots$（为简单起见，我们设琴弦从 $x = 0$ 延伸到 $x = \pi$）。每一个函数代表点 x 以特定模式上下振动时的振幅。此时，振动的能量与这个振幅的平方成正比，所以每一种模式的总能量与 $\int_0^\pi [f_n(x)]^2 \mathrm{d}x$ 成正比。因为这些能量来自于最初琴弦被拉伸时所注入的能量，所以 $\int_0^\pi [f_n(x)]^2 \mathrm{d}x$ 的值一定是有限的。而这个积分又是 $f_n(x)$ 的模的平方（参见方程（8））。还可以证明，对于每一对函数 $f_m(x)$ 和 $f_n(x)$，三角不等式成立，而且可以证明，当 $m \neq n$ 时 $(f_m, g_n) = 0$，即在这个集合中任意不相同的两个函数都是正交的。函数 $\{f_n(x)\}$ 的集合是一个希尔伯特空间。[2]

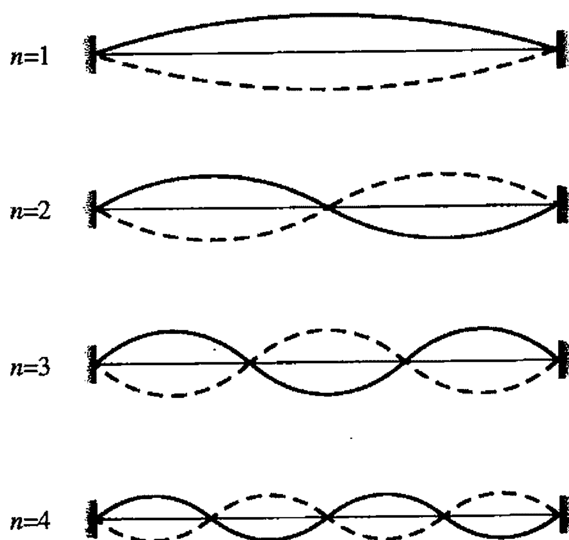


图 11-7 振动琴弦的调式

希尔伯特空间在现代数学物理的若干领域起着重要作用，包括泛函分析、微分方程、振动理论和量子力学等，这充分证明数学的威力，它可以把以往的具体概念提升到提出它的人从来没有想到的抽象高度。

注释和参考文献

[1] 希尔伯特在他的数学物理著作中引入了这个空间。但是，是爱尔哈德·施密特（1876—1959）和莫里斯·弗雷歇（1878—1973）给出它的几何解释的，即希尔伯特空间是无限维向量空间。参见 Morris Kine 的 *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* （Oxford University Press, 1990），vol.3, pp.1082-1095。

[2] 关于希尔伯特空间的更多内容可以参见 Erwin Kreyszig 的 *Introductory Functional Analysis with Applications*（Wiley, 1978）。

第12章

从平坦空间到弯曲的时空

> 1854年6月10日，一种新几何诞生了。
>
> ——加来道雄，《超空间》，p.30

前面已提过，18世纪初人们又恢复了对综合几何和射影几何的兴趣，从而发现了圆和多边形等普通几何对象的一些新性质。尽管这些发现很重要，但是它们没有从根本上改变数学的状况，更多的还是建立在两千多年前欧几里得建立起来的基础之上的。但是，这一状况在大约1830年却因两个新的数学分支的诞生而发生了巨大的变化，这两个分支是微分几何和非欧几何，它们对数学未来的发展产生深刻的影响。

经欧拉建立又由黎曼给出其现代形式的微分几何，运用微积分的方法研究几何面。然而，度量性质，也就是可以测量并用数值量表示的几何面的某些性质，在射影几何中几乎没有位置，而微分几何全都是关于度量性质的。事实上，度量的概念正是微分几何发展的核心。

不过，我们首先必须谈一谈坐标。1637年笛卡儿发明了坐标几何，他使用两个相交直线充当坐标轴（当时他没有称它们为坐标轴，这两条直线也不是必须相互正交）。可以通过两个指定的数来定位平面上的任何一点，即这个点距离两个轴的距离（图12-1）。这演变成我们熟悉的适用于研究大多数平面曲线性质的直线坐标系及极坐标系。但是，为了定位三维立体表面上点的位置，用其他坐标系也许更好。

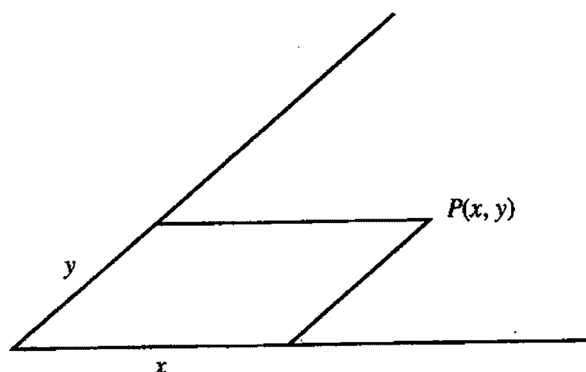


图 12-1　坐标

球体表面就是一个很好的例子。球面上的经纬圈形成一个坐标系，在这个坐标系下，坐标不是距离而是角测度。当我们说耶路撒冷的经度是东经 35°、纬度是北纬 32°时，说的是，它坐落于格林尼治的零度子午线以东 35°、赤道以北 32°。当然，知道了地球的半径，我们就可以把这些角坐标变成空间中的实际距离。但是这将与这些坐标的目的相违背，这些坐标不是定位三维空间的点，而是定位这个点在表面上的位置。[1]

在这样的坐标系下，毕达哥拉斯定理是否成立呢？为了弄清楚这一情况，我在面前摆放了几何学家必备的国家地理地球仪，以及测量这个地球仪表面距离的球面尺（图 12-2)。使用这些工具，我找到纽约到伦敦之间的直线距离大约是 5600 公里。这一“直线”路程其实是大圆上的一段弧，所谓的大圆就是圆心是这个球的球心的圆。球面两点的大圆弧是

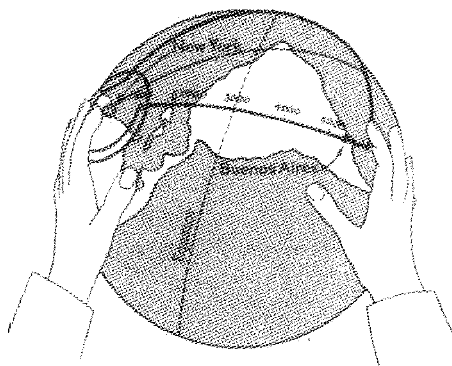


图 12-2　地球仪和球面尺

这两点之间的最短距离。

现在，想象一下从纽约到伦敦分两段飞行的飞机：从纽约出发沿着纽约的纬度圈（北纬 40°）往东飞行到伦敦的子午线（北纬 0°），然后再往北沿着子午线飞行。第一段大约有 6127 公里，而第二段大约是 1168 公里。这两段航线和两城市之间的直线路程构成球面上直角三角形的三条边。对于这个直角三角形，我们有 $6127^2+1168^2=38\,904\,353$，而 $5600^2=31\,360\,000$。所以 $a^2+b^2>c^2$。我们得出结论：在球表面上，毕达哥拉斯定理不成立。

对于球面，存在使用两个点在其表面的坐标给出这两点间距离的公式，但是对于一般的表面，就不存在这样的公式。我们能做到最好的事情就是寻找无限靠近的两个点之间的距离 d*s*。假设我们在一个半径为 *r* 的球面上求这个距离 d*s*（图 12-3）。设两个点分别为 $P(\lambda,\ \phi)$ 和 $Q(\lambda+\mathrm{d}\lambda,$

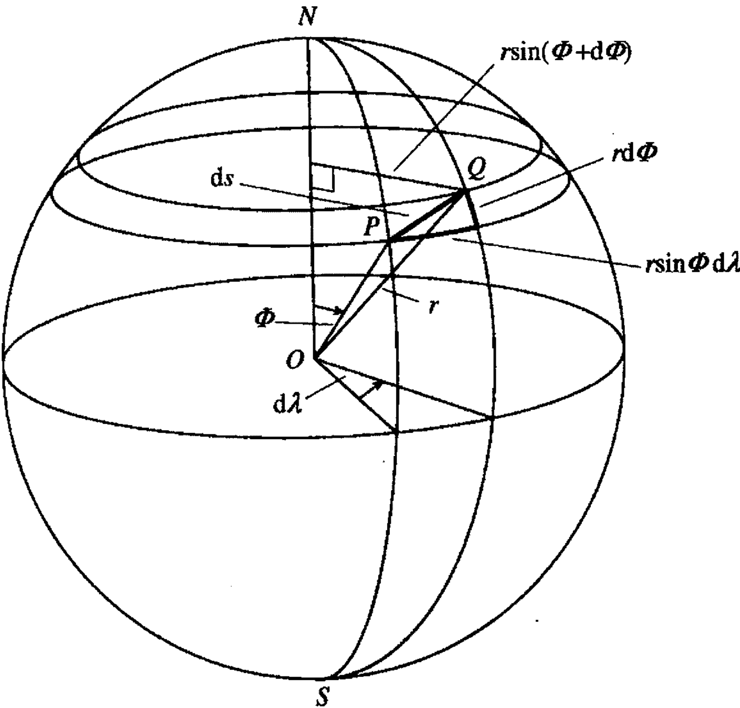


图 12-3 球面坐标

$\phi+\mathrm{d}\phi$)，其中 λ 和 ϕ 是点 P 的经度和纬度，它们都是按半径度量的，而不普通的角度。(在数学中，通常的作法是测量从北极（$\phi=0$）到赤道（$\phi=\pi/2$）经度，而在地理学中却与此相反。) 点 P 位于半径为 $r\sin\phi$ 的经度圆上，所以在这个圆上经度 λ 和 $\lambda+\mathrm{d}\lambda$ 之间的弧长是 $(r\sin\phi)\mathrm{d}\lambda$。另一方面，纬度 ϕ 和 $\phi+\mathrm{d}\phi$ 之间沿经度 λ 的弧长是 $r\mathrm{d}\phi$。而且，因为这些弧相互正交，所以我们有

$$\mathrm{d}s^2=(r^2\sin^2\phi)\mathrm{d}\lambda^2+r^2\mathrm{d}\phi^2 \tag{1}$$

把上面表达式与直角坐标表达式 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2$ 相比较，我们看到一个重要差异（除符号差异之外）：$\mathrm{d}\lambda^2$ 的系数不仅不是 1，而且它本身是 ϕ 的函数。因此，这一弧长不仅依赖于两点之间的经度和纬度的差，而且还依赖于它们的实际经度，这是因为，当我们靠近北极时，经度圆的大小收缩。这说明当我们把球表面看成二维空间时，它拥有不同于平面几何的几何特性。

我们再考虑一个例子：直圆柱的表面（我们假设这个直圆柱可以上下随意伸长）。设这个圆柱的底是一个半径为 r 的圆。与球面一样，我们可以把这个圆柱放到坐标系中。在这个坐标系下，经度线（子午线）是沿圆柱的线，而纬度圈则是与之垂直的圆（图 12-4）。我们能够以点 P 的经度 λ 和纬度 z（到“赤道”的距离，沿着通过 P 的子午线来测量）来定位它。两个邻近点 $P(\lambda, z)$ 和 $Q(\lambda+\mathrm{d}\lambda, z+\mathrm{d}z)$ 之间的弧长由下面的公式给出

$$\mathrm{d}s^2=r^2\mathrm{d}\lambda^2+\mathrm{d}z^2 \tag{2}$$

因此，除了第一项中的比例因子 r 外，毕达哥拉斯定理仍保持着“自然”的模样。这充分表明圆柱表面与平面一样拥有属于自己的几何，例如，我们可以把这个圆柱展平在一张纸上而没有弯曲（对于球来说无法

这样做）。圆柱平面满足欧几里得几何的法则，它形成一个二维欧几里得空间。[2]

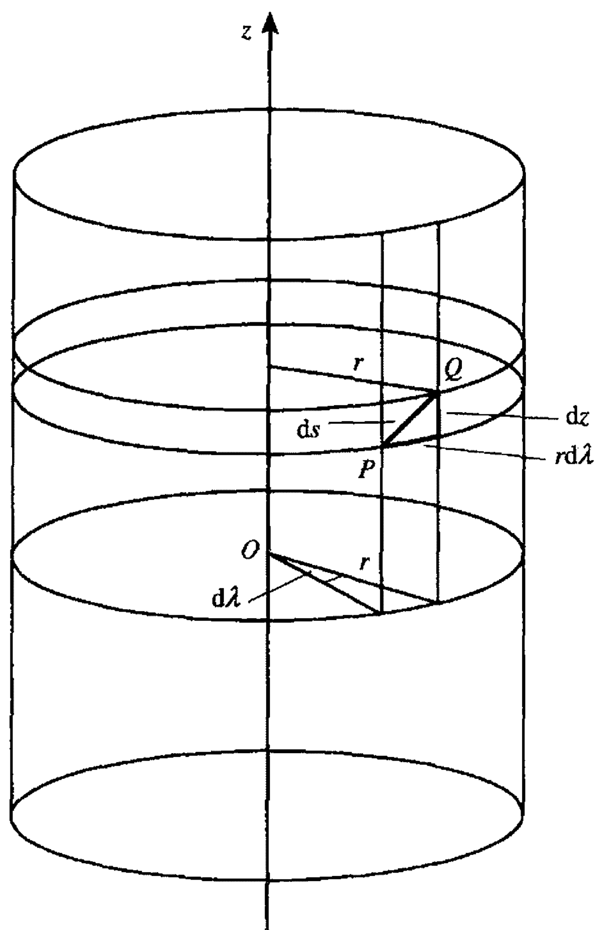


图 12-4 圆柱坐标

因此，我们看到每一个坐标系都有自己的 ds^2 表达式，有自己的毕达哥拉斯定理形式。这一表达式在研究曲面时的重要性，所以我们给它起个名字：度量（这里当名词使用）。通过研究这个度量，我们可以知道所考虑曲面的性质。例如，考虑这个坐标系中的线之间的夹角。在上面所讨论的两种情况下，这个度量只包含“纯”项，即每一项只含有一个坐标微分。当这种情况发生时，彼此相交的格线形成直角，这样的坐标系

称为是直角的。在非直角坐标下，度量包含含有坐标微分积的“混合项”。为了说明这一点，考虑这样一个坐标系，它的 x 轴和 y 轴的夹角为 α（图 12-5）。这个坐标系中的栅格线是倾斜的，每一个“方格”是菱形。利用余弦法则，我们给出两点 P（x_1, y_1）和 Q（x_2, y_2）之间的距离：

$$s=\sqrt{\Delta x^2-2\Delta x\Delta y\cos(180°-\alpha)+\Delta y^2}=\sqrt{\Delta x^2+2\Delta x\Delta y\cos\alpha+\Delta y^2}$$

其中，$\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$。这个坐标系下的度量是

$$ds^2 = dx^2 + 2\cos\alpha dx\, dy + dy^2 \tag{3}$$

这个坐标系不是直角的事实可以由混和项 $2\cos\alpha dxdy$ 表现出来。

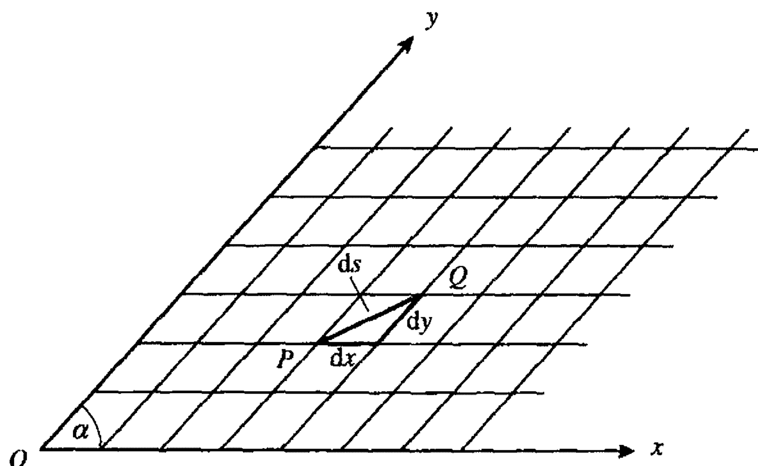


图 12-5　倾斜的坐标



1850 年，一位年轻数学家出场，并给这些思想赋予了全新的意义，这些思想得到了极大的完善。黎曼于 1826 年出生于德国的汉诺威，他的父亲是路德教派的牧师。最初他对神学的兴趣促使他试图通过数学方法证明《创世纪》的真实性。但是不久，黎曼的注意力转移到了数学研究的众多领域，其中投入最多的是几何。1851 年在高斯指导下完成的博士

论文中，他引入两个具有奠基意义的思想：几何不仅不局限于三维空间，而且空间的性质，特别是它的度量，可以随着点的不同而发生变化。换句话说，度量是局部量而不是全局量。

今天，第四维已变成我们日常用语的一部分，即使谈及十维空间也不会令人感到惊慌。但是在 19 世纪，高维的概念却是非常新奇的概念，是胡编的科幻小说的素材。毕竟，我们可以认为点是零维、线是一维、平面是二维、空间是三维的，但是，到什么地方为止呢？在他的论文中，作为数学实体，25 岁的黎曼引入了四维空间，实际上是引入了任意维空间。这样的空间是否有物理实体存在则另当别论。黎曼认为可以允许数学来创造它自己的空间，只要这些空间不自相矛盾。

但是事实并非完全如此。黎曼认为每一个这样的空间都有它自己的度量，这个度量可以由下面的差分方程给出

$$ds^2 = \sum_{ij} a_{ij} dx_i dx_j \tag{4}$$

这个方程中的求和符号实际上是双重求和：它告诉我们形成所有可能的 $dx_i dx_j$ 积，每一项都乘以一个系数 a_{ij}，并对所有的 i 和 j 求这些积的和。这个和把项 $dx_i dx_j$ 计数了两次，一次是 $dx_i dx_j$，另一次是 $dx_j dx_i$，我们按照惯例认定 $a_{ij} = a_{ji}$。例如，在斜坐标系中（方程(3)），我们有 $a_{11} = 1, a_{12} = a_{21} = \cos\alpha, a_{22} = 1$。

方程(3)中的系数是常数，因为角 α 是固定的。这表明这个斜坐标系各处有相同的度量。然而，在一般的意义下，系数 a_{ij} 可以是坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数。我们已经看到球面上这样的例子（方程(1)），$d\lambda^2$ 的系数（$r^2\sin^2\phi$）是纬度 ϕ 的函数，因此一般情况下这个度量是局部的，而不是我们选择用于描述空间的坐标系的整体性质。

在本书中，我常常列举数学和音乐之间的相似性，而当前的讨论更

适于此。几何空间的度量对应于音乐空间的*节拍*：它们都定义组织主题本体的一种结构。在大致 1800 年之前的古典音乐中，乐章通常有固定的节拍：4/4（表示一个小节要敲四下）、3/4、6/8，还有偶尔出现的 5/4。这样的节拍刻画了一部作品的主旋律等诸多特性。贝多芬小提琴协奏曲开篇的五声定音鼓，开始时只能勉强听见，但随着音乐的展开，不断重复，且贯穿于整个第一乐章。但是到了 19 世纪中期，也就是黎曼进行其开创性工作的时候，作曲家开始在一个乐章中运用频繁变化的节拍。在伊戈尔·斯特拉文斯基的巴蕾舞《春之祭典》的配乐中，节拍按小节反复变化，有时是从主节拍的 6/8 到 7/8，然后再到 3/4，6/8，2/3，6/8，3/4，最后是 9/8，而其后就是下一个持续的变化节拍。当这首尔曲 1913 年首次在巴黎公演时，听众们表示出强烈的不满，他们吹口哨、跺脚、按喇叭，第一次听到这样不和谐的陌生声音，这样的表现不足为奇。以往平坦空间的舒适世界和固定节奏也许一去不复返了。



黎曼提出的存在任意维空间和变量几何这两种思想，迫使数学家重新思考他们观察几何面的方法。当然，弯曲表面的概念不是黎曼的原创。在他之前，人们就已经把弯曲表面看成是三维实体的包络，而且把它当作这个三维实体几何的一个部分来研究。作为航海中极为重要的课题的球面三角学就是一个很好的例子。球面三角学法则显然不同于平面三角学法则，但是这不令人惊讶。球面三角学只是把球体的几何学运用到了它的几何面而已。

黎曼改变了这一观点。他把几何面看成是脱离以它为边界的任何几何体的自身的空间。这样的空间拥有它自己的几何，这种几何不同于平坦空间的欧几里得几何。想象一下蚂蚁这样的二维生物，它只知道两种

运动：向前和向后，以及向左和向右。在这个蚂蚁的生活中，不存在第三维空间，为了它自己的所有意图和目的，它都在一个二维的平坦世界中消耗着它的时日。但是，如果这只蚂蚁开始探索它所生活的这个世界，即我们星球的表面，它也许会发现这个世界不符合久远的欧几里得法则。例如，如果两只蚂蚁同时从赤道上的两个不同点出发，都朝北行进，它们的大脑中会毫不怀疑它们正沿着两条平行线运动。想象一下当它们经过数年的旅程之后在北极相遇时的惊呆场面！看似平行的两条直线居然相交于一点：从我们三维空间看，它们根本不平行。但是蚂蚁不知道这件事，从它们的二维空间看，两条平行线是绝对不会相遇的。[3]

其他我们熟悉的欧几里得几何法则对球面也同样不适用：一条直线（实际上是大圆的一段弧）不能无限延长；它有有限长度，等于这个球的周长。三角形三个角的和通常大于 180°，而且毕达哥拉斯定理不再成立，至少其形式不是 $a^2+b^2=c^2$。这些事实在黎曼之前就已经知道了，但是，正是黎曼的新观点改变了我们解释这些事实的方法。使用他的经典表述：球体表面是一个二维非欧几里得空间。

你常会听到词语“弯曲的空间”，这指的是不同于欧几里得平坦空间的空间。但是，需要小心辨识单词“平坦”和“弯曲”。例如，当把一个圆柱表面本身看成一个空间的时候，在满足欧几里得几何法则的意义下，它是“平坦的”，特别地，它有毕达哥拉斯度量（参见方程(2)）。相反，对于球体的表面，即使把它看成是一个二维空间，它仍是“弯曲的”，与它之下的固体球无关。这一点可以由方程(1)的非毕达哥拉斯定理形式反映出来。[4]

但是，现在假设蚂蚁的确居住在一个平坦的空间里（从我们的三维空间看），在一个平面上但会有一些皱纹。在我们这些局外人看来，这些皱纹只不过是二维空间到三维空间的某些局部状况而已，而在蚂蚁看来，

这些皱纹是整个平坦平面的局部暴乱，是它们的几何世界中的瞬间变化。以黎曼的观点看，我们必须抛弃空间有固定、命里注定的几何的理念。相反，他认为所有几何性质，特别是度量，是随点而变化的局部性质。这就是为什么表达式 $\sum_{ij} a_{ij}\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$ 中的系数 a_{ij} 可以是坐标的函数的原因：每一个点都有属于它自己的几何，有属于它自己的度量，有属于它自己的毕达哥拉斯定理。根据黎曼的观点，几何是局部的。这对任意维几何空间都是真理。



1854 年 6 月 10 日，黎曼在哥廷根大学数学教员面前发表了一次具有历史性意义的讲演。这是他为获取教员资格的讲演，这是每一位胸怀大志的学者为了步入这个神圣的学术殿堂都必须通过的传统性的仪式。出席讲演的著名学者当中就有他的导师高斯，一位已处于生命最后阶段的 77 岁老人。黎曼的讲演题目是“论作为几何基础的假设”。他的思想具有革命性，他的讲演带来了极大的热情，他完全有理由在数学前沿研究中开创自己的漫长人生。但是，事实并非如此。由于从小身体状况一直不好，1866 年 7 月 20 日黎曼死于肺结核，距他 40 岁生日还差两个月。他的讲演稿在他死后的 1968 年出版，15 年后他的思想成为广义相对论的基石。

注释和参考文献

[1] 我忍不住要给大家讲一个我曾经从一位软件专家那里听来的故事，这位专家被指派负责检查一种已经安装于一架飞机上的新导航系统的精确度。这一测试需要做一次从英格兰向北经过北极到达阿拉斯加州的飞行。当这架飞机到达北极时，显示系统显示的纬度是 88°，89°，90°，91°，…。

[2] 然而，我们使用了地理纬度 ϕ（在赤道中心进行度量）替代线性纬度 z，

弧长的表达式应该是 $ds^2 = r^2[(d\lambda)^2+\sec^4\phi\ (d\phi)^2]$，它带有明显的非欧几里得的样子。这表明这一度量不是决定这一几何面的性质的唯一因素；同样重要的是这一几何面上的双曲函数。

[3] 在某种程度上，这的确是语义的问题。欧几里得的《几何原本》开篇的 23 个定义中的最后一个定义平行线为“在同一平面上，且在两个方向上无限延长时在任意方向上都不相遇的两条直线。”因为这两只蚂蚁沿各自的子午线的路径在北极相遇，所以它们不是平行的。

你也许期望把纬度圆看成是平行“线”。的确，这些圆相互间不相遇（这就是为什么在地理学中称它们“平行”的原因）；但是，除赤道外，它们都不是大圆，所以它们没有资格被称为球面上的“直线”。

[4] 弯曲空间的一个漂亮例子就“云门”，它是位于芝加哥千年公园内由印度出生的英国艺术家阿尼什·卡普尔设计的一个巨大的反射雕像。人们称其为“豆子”（参看彩图 3），它把其周围地面上的正方形栅格反射到其闪闪发亮表面上，成为一个一个弯曲的栅格。

补充 9　滥用的情况

谅也没有人敢把滥用投影的罪名加到墨卡托头上；只有那些滥用墨卡托地图的人才应受到指责。

——无名作家，约 1600 年

1990 年，我最后一次乘坐环球航空公司的飞机，这家航空公司曾一度是美国航空业的骄傲，但今天已风光不在了。没有其他事情可做，我从前面座位背后的口袋里取出一份购物目录，一张照片立刻吸引了我的注意力（图 S9-1）。它展示一位笑容可掬的女士，好像正在测量一张大地图上两点的距离。这没有什么不同寻常的地方，只是这张地图是墨卡托绘制的，它因其大陆尺寸的严重失真而出名（也许是恶名昭著）。只要与地球仪做一粗略的比较，就可看到格陵兰在这张图中过大，实际上，比南美还要大，而现实中它只有南美的 1/9。对我们的地球如此严重失真的绘制，怎能使它成为绘图法历史中有名的地图呢？

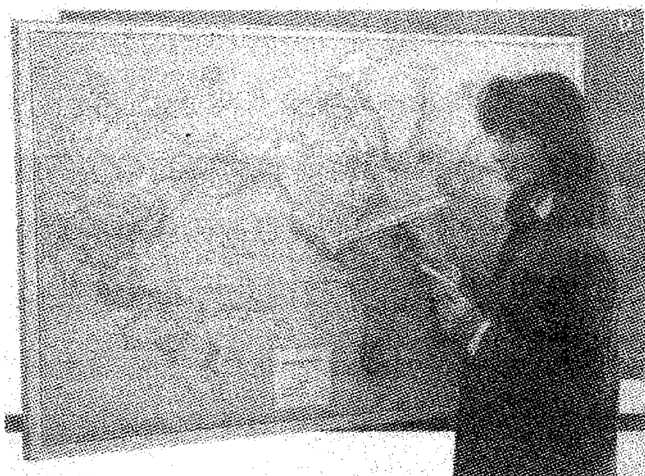


图 S9-1　墨卡托地图

这要回到16世纪，这是一个探险与发现的世纪。水手们因受到新大陆和传说中的珠宝的诱惑，冒着风险去更远的地方探知未知海域。但是，两个障碍影响着他们的探险：不知道测定海上船只经度的可靠方法；没有一张地图可以把等角航线（等角航线就是可以给航海家指示从他出发的港口到目的地方向的罗盘方位）显示成直线。第一个障碍直到150年后才得以解决；[1]而第二个障碍到了1569年由荷兰地图制作师格哈德·墨卡托（1512—1594年）破除了。[2]

就像曾把剥落下来的橘皮压到桌面上的人知道的那样，我们无法把一个球面展平成一张纸而不引起显著的破损。为了解决这一问题，地图绘制师们发明了很多地图投影法。地图投影就是一种数学函数，它可以给地球上每一个点指定地图上唯一的“像”点。很多投影都可以完成这一任务，每一种投影都有其自身的失真率，但也有其自身的不变量——这是指在这种投影下不发生改变的特性。墨卡托的目标是寻找一种保持方向的投影。这样的地图把所有的等角航线绘制成直线，而等角线就是穿梭地球的常量线，这样做可以使得航海家很容易在地图上标示出他的航线并在海上沿其行进。

为了做到这一点，墨卡托选择了矩形栅格，在这些栅格中所有子午线（地球上的经度圆）都被显示成垂直且均等间隔的直线。平行线（纬度圆）是等长的水平线，但是它们随着纬度的增加间隔渐渐增大（图S9-2）。这样做的目的是弥补当纬度圆靠近两极时渐渐变短所带来的误差。图S9-3给出了半径为R的地球仪以及其上的纬度为ϕ的一个圆。这个圆的实际周长是$2\pi R\cos\phi$，但是在地图上，它的长度是常量等于$2\pi R$。因此，地图上的每一个平行圆的长度相对于它的实际长度要拉长一个因子$2\pi R/(2\pi R\cos\phi)=\sec\phi$。墨卡托认识到为了保持方向，相邻两个平线圆的间隔也必须增加一个相同的因子。因此有下面的微分方程：

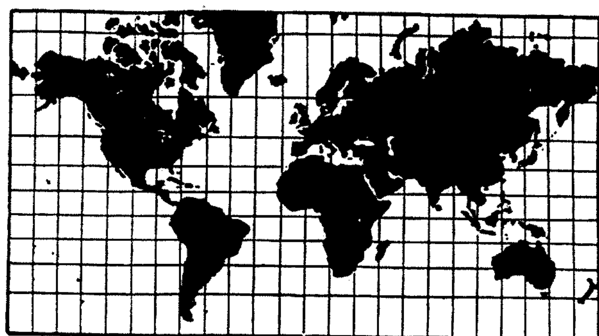


图 S9-2　墨卡托栅格

$$dy = R\sec\phi\, d\phi \tag{1}$$

这里，纬度 ϕ 是以弧度为测量单位的，而不是我们平时所使用的度、分和秒。另一方面，子午线各处是等间隔的，所以有

$$dx = Rd\lambda \tag{2}$$

其中，λ 表示经度（也以弧度计算）。墨卡托不是一位数学家，因此他从没有写出这些方程；实际上他是用数值积分来解决这些问题的（地图绘制师仍旧在争论他是如何处理积分的）。直到 1599 年，也就是他死后的第 5 年，英国数学家和仪器制造商爱德华·赖特（1560—1615）才给出墨卡托地图构造原理的一种解释。[3]

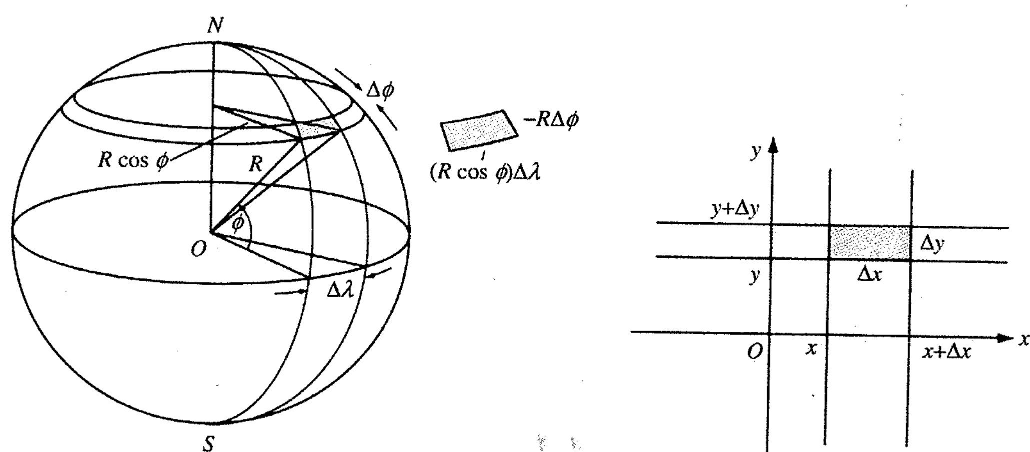


图 S9-3　一个球面上的矩形和它在墨卡托地图上的像

如绘图法的通常情况一样，保持一种特性，比如上面情况中的方向特性，是要以牺牲其他特性为代价的。特别地，墨卡托投影使得高纬度国家形状失真。于是，地图上的两点间的距离就不能保持不变，而且这个距离也不与地球这两个地方的实际距离成比例关系。因此，这表明毕达哥拉斯定理不再成立。实际上，从方程(1)和(2)，墨卡托地图上两个邻近点的弧长 ds 由下式给出：

$$ds^2 = R^2(d\lambda^2+\sec^2\phi d\phi^2)$$

这显然是非毕达哥拉斯形式的公式。

现在，我们回到开头那位无名作家的话。要记住，墨卡托地图只是为保持方向这一目的而发明的，如果把它用于其他目的就不合适了，就会引起很多混乱和误解。这是乱用这张地图的人的过错，而不是其绘制者的过错。

注释和参考文献

[1] 参见 Dava Sobel, *Longitude: The True Story of a Lone Genius Who Solved the Greatest Scientific Problem of His Time* (Walker, 1995), *The Illustrated Longitude*（Walker, 1998）。

[2] 关于墨卡托的生平，请看 Nicholas Crane, *Mercator: The Man Mapped the Planet* (Weidenfield and Nicholson, 2002), Andrew Taylor, *The World of Gerard Mercator: The Mapmaker Who Revolutionized Geography* (Walker, 2004)。

[3] 关于墨卡托地图的更多内容，请看《三角之美》的第 13 章。还可以参看 Mark Monmonier 的 *Rhumb lines and Map Wrs: A Social History of the Mercator Projection*（University of Chicago Press, 2004）。

第13章

相对论的前奏

> 1887年在克利夫兰进行了著名的“迈克尔孙–莫雷实验”，它得到一个完全否定的结果……相对于光的速度，所期望的地球速度的增加或减少都没有发生。
>
> ——蓝佐斯《爱因斯坦和宇宙世界的秩序》p.38

安静的巴塞尔小镇位于莱茵河畔风景优美的群山之中，这里是瑞士、法国和德国的交界处。几个世纪以来，它已成为艺术、工艺、印刷和出版的中心，也是一流学术交流的中心。它的居民当中有人道主义者伊拉斯默斯、画家小汉斯·荷尔拜因和政治家西奥多·赫茨尔。它的大学创建于1469年，是一所欧洲最古老的大学，也是伯努利家族和欧拉的母校。就是在这里，在这个小镇的令人难忘的曼斯特大教堂的修道院里，第一位取得辉煌成就的伯努利家族成员，杰克·伯努利就埋在这里。雕刻在他墓碑上的是他喜欢的曲线螺旋线并附碑文“纵然改变，依然故我”，意指在旋转、拉伸和反转的情况下，这条曲线仍具有不发生变化的性质。唉，不知道这位石匠是弄错了还是故意的，他在墓碑上刻的是一条错误的曲线，是阿基米德的（线性）螺旋线而不是对数螺旋线！毫无疑问，杰克在墓里一定会上诉的（图13-1）。

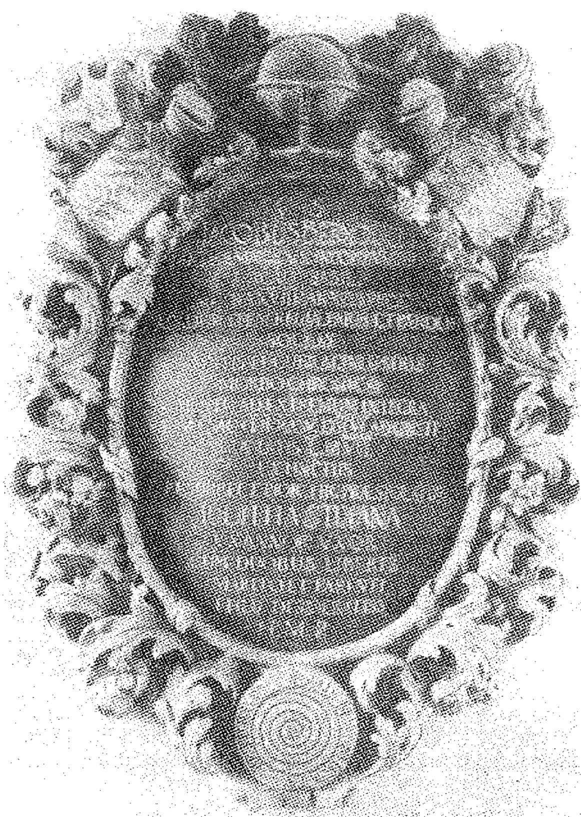


图 13-1　杰克·伯努利的墓碑，巴塞尔

巴塞尔也是地理界标：就在这里莱茵河急转向北，从一条蜿蜒的阿尔卑斯山脉里的潺潺溪流变成流经西欧核心地带的 800 公里大水路，最后汇入鹿特丹附近的北海。就是在这里，在莱茵河左岸，我第一次领略了相对论的意义。

就像过去几百年间的高中生一样，在科学课程中，我必须掌握向量加法和平行四边形法则（参见第 11 章）。黑板上清楚明了地写着它，但是，我却无法理解它的物理意义。多年之后，我游览了巴塞尔，看到某只小渡船规律地从莱茵河的一岸行驶到另一岸（图 13-2）。大约需要 5 瑞士法朗，你就可以悠闲地坐着这样的小船顺流而下。没有任何发动机，没有帆，也没有桨。那么这样的小船是如何工作的呢？小船被松弛地系到一条横跨河上的钢缆。当湍急的流水推动小船时，钢缆就迫使它沿着

垂直于河岸的方向行驶，似乎没有任何向前的运动（图 13-3）。



图 13-2　横跨莱茵河的小船。注意它与河流之间的锐角

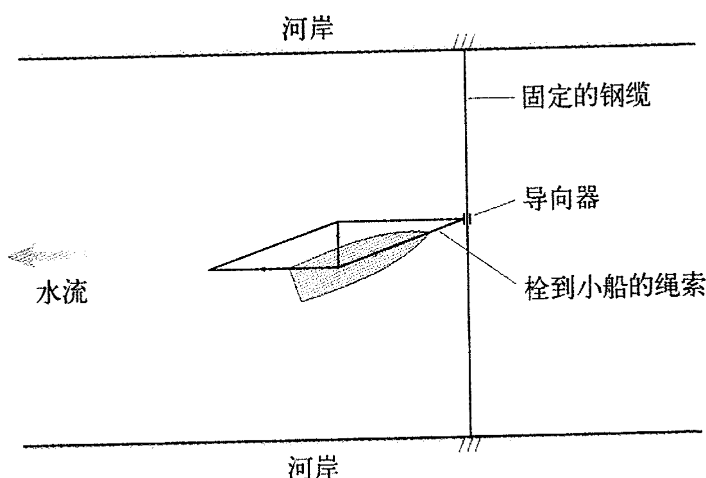


图 13-3　什么使小船可以渡过这条河

我被自己看到的一切惊呆了。我注意到这条小船要始终与河流保持成锐角，事实上，它几乎与其在一条直线上。于是我意识到，小船实际上相对于河流是向前运动的，而河流的推动使它向后运动，只是小船相对河流的方向使这两种运动不会相互抵消：它为小船提供过河所需的侧力。

为了把上面的解释转换成向量语言，我们设 **v** 和 **u** 分别表示河流的速度和小船相对于河流的速度（图 13-4）。它们的合成或称为向量和，是

向量 **w**，它与河流垂直。我们有 $\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$，且 $w^2=u^2-v^2$（这里 u、v 和 w 表示各自速度向量的大小）。[1]

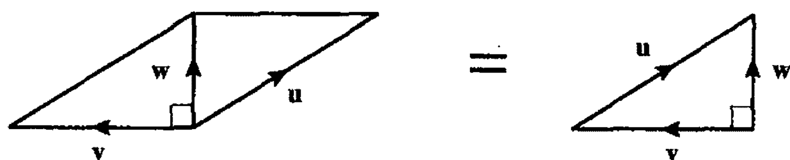


图 13-4　向量加法

这让我经历了一次“思维实验”，这是青年爱因斯坦非常享受的大脑反思。假设有完全相同的两条船，且都配有发动机，同时从河的某岸 A 点出发渡过宽为 1 英里的河。一条船直接渡过这条河到达 A 的对立点 B，然后再返回到 A 点。而另一条船沿着河流行驶 1 英里到达 C 点，然后再返回到 A 点。哪条船首先返回到 A 点呢？

同前面一样，设河流的速度为 v，每条船在水中的速度是 u（我们假设 $u>v$，否则第二条船就永远无法返回）。使用如前的思路，我们有（图 13-5）$\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 且 $w^2=u^2-v^2$。小船渡过这条河所使用的往返时间是

$$t_1=\frac{2}{\sqrt{u^2-v^2}} \tag{1}$$

（注意，从点 A 到点 B 与从点 B 到点 A 的情况完全对称），而沿着河往返所需的时间是

$$t_2=\frac{1}{u+v}+\frac{1}{u-v}=\frac{2u}{u^2-v^2} \tag{2}$$

为了弄清楚上面两个式子哪一个更小些，我们把 t_2 重新写成如下形式：

$$t_2=\frac{2}{\sqrt{u^2-v^2}}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}}$$

上面式子中的第一个因子与 t_1 相等，而第二个因子总比 1 大（分母小于 $\sqrt{u^2}=u$），因此 $t_2>t_1$ 即渡河的小船首先返回到起始点。

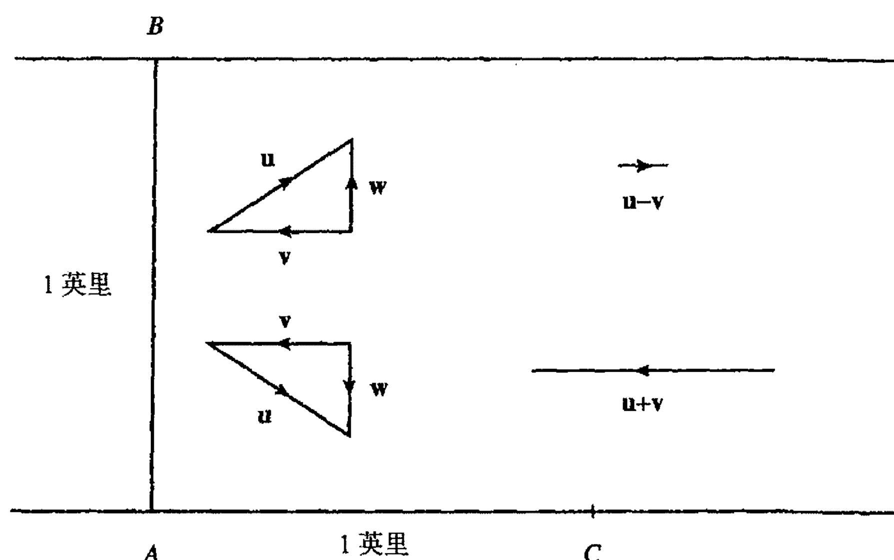


图 13-5 哪个小船首先返回出发点？上面的向量图展示向外行驶的旅程；下面的向量图展示返回的旅程

现在，我们想象用一束光取代一只小船。在 19 世纪，科学家相信电磁波（包括光）一定是像声波穿越大气那样穿越某种物质媒介。然而，麦克斯韦用 4 个微分方程概括出来的电磁波定律并没有要求物质媒介的存在，这种“媒介”是电磁场本身。但是，19 世纪的物理学仍然在牛顿的宇宙机械论观点的控制之下，于是物理学家们提出了以太的概念，这是一种不可见的“发光”物质，人们想象它充满了空间，因此允许光通过。令人难以捉摸的以太实际上还有另一种意图，即提供一种绝对、通用的参照框架，它本身是静止的，相对于它的所有运动都可以测得。

以太的假设成为 19 世纪物理学的一个必须涉及的问题，没有人发现任何证明它的确存在的实验证据。在解决这一问题的过程中，两位美国科学家迈克尔逊（1852—1931）和莫雷（1838—1923）于 1887 年进行了

一项实验——一束光被一个与光的方向成45°角的半透明镜子分成相互垂直的两束光（图13-6）。然后，再利用距分离镜等距的两面镜子把它们沿原路反射回去，此时这两束光又合成一束光。调整整套仪器使得其中一束光沿地球绕太阳运动的方向传播，而另一束光的方向则与它垂直。

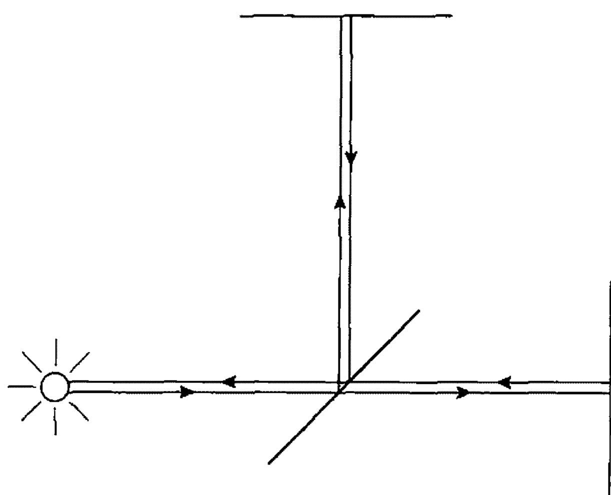


图13-6 迈克尔逊-莫雷实验

在没有以太存在的情况下，这两束光将几乎同时返回它们的光源（的确，回头看方程(1)和(2)，如果$v=0$，那么$t_1=t_2$）。但是，如果如人们认定的那样存在以太那么沿着与地球运动方向平行的光束要比与它垂直的光束返回起始点的时间晚几分之一秒。因为每一束光都是波，传播时间上的微小差异将导致这两束光传播的不协调。通过调整次级的两面镜子，你也许可以迫使这两列波反向合成，即一列波的波峰与另一列波的波谷合成。于是形成一系列干涉条纹，即交替的黑线和白线，并可以在屏幕上观察到。[2]

令迈克尔逊和莫雷惊讶的是，他们没有发现干涉条纹，即便后来重复实验也是如此。这一结果立即在科学界引起骚动。人们多方努力试图解释这一结果，但是没有一个令人信服的解释。正是一位年仅26岁的物

理学家给出了答案：这个实验"失败"的原因是没有以太。以太是虚构的，所以绝对静止也是虚构的。这位物理学家就是爱因斯坦，他当时是伯尔尼瑞士专利局的一名职员，还没有名声。他的第一篇论文是"论运动物体的电动力学"，1905 年发表在《物理学年刊》上，这篇论文立即触动了物理学基础，它将永远改变我们观察空间和时间的方法。相对论诞生了。

在他论文的末尾，爱因斯坦向他的朋友米榭·贝索致谢，因为在他发展其理论的过程中，这位朋友向他提出一些非常有价值的建议。爱因斯坦没有向对他有帮助的另一位 2 500 年前的科学家致谢，这个人就是毕达哥拉斯。相对论的论文到处都可以看到毕达哥斯定理的脚印，从狭义相对论中无处不在的 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ ，到广义相对论的深奥莫测的 $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j$。后者是我们下一章的话题。

注释和参考文献

[1] 最后的方程尽管与前面的向量方程看似不一样，但实际上它们是一致的。为此你可以再仔细看一下图 13-4。

[2] 当然，这里对迈克尔逊–莫雷实验的描述是相当简单的。对于更详细的描述，请参看 David Layze，*Constructing the Universe* (Scientific American Library, 1984), pp.157 – 160。

第14章

从伯尔尼到柏林，1905~1915年

> 空间也好，时间也好，都陷入到彼此的阴影中，只有它们的合集时空才是独立存在的。
>
> ——赫尔曼·闵可夫斯基《空间和时间》，1908年

为了使电磁波的传播符合已知的事实，爱因斯坦提出了下面三个假设。

1. 所有运动都是相对的。绝对静止的状态是虚构的。

2. 对于所有观测者来说，物理学定律都是相同的，与他们之间的相对运动无关。

3. 光以相同的速度穿越空间，与观测者自身相对于光的运动无关，即真空中的光速对于所有观测者都相同。

在19世纪最后几年里，爱因斯坦还很默默无闻，物理学界对这些问题展开了激烈的争论，迈克尔逊-莫雷实验（参见第13章）的否定结果只能使这场争论越发激烈。而正是爱因斯坦从这些事实中得出了正确的结论。他认识到假设3表明时间也必须是相对的。牛顿假设存在一种通用主控时钟，均一地标识整个空间中时间的流逝，而爱因斯坦认识到每一位观察者都体验其自己的时间。[1]

现在，想象一下位于三维空间坐标系（x，y，z）原点处的光源。在

时间 $t=0$ 时，这个光源射出一个球面波，它在空间中的传播速度为 c。设 $P(x, y, z)$ 是所传播波的波阵面上的一点。经过 t 秒后，点 P 经过的距离是 ct，所以我们有

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \tag{1}$$

这是位于坐标系（x, y, z）原点处的观测者所看到的波阵面的方程。现在，假定有第二位观测者，他位于坐标系（x', y', z'）的原点处，这个坐标系相对（x, y, z）坐标系以常量 v 的速度运动。根据假设 3，这位观测者也应该看到以速度 c 传播的波阵面。而这表明有

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 \tag{2}$$

注意，方程(2)右边的所有变量都是带撇的，而 c 不带撇：光速在两个坐标下是相同的。

从方程(2)能够得到从（x, y, z, t）坐标系到（x', y', z', t'）坐标系的转换方程（注意，我们现在已把时间作为第四坐标，这是将要发生的事情的前兆）。为了简化问题，我们可以选择坐标系使得带撇的坐标系是沿无撇坐标系的 x 轴正向移动得到的（图 14-1），于是，我们有 $y'=y$，$z'=z$。在这里我们不与读者分享整个推理过程，这在任何现代物理学的课本中都可以找到。[2]最终的结果是

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\frac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{3}$$

(3)中的所有方程合在一起就是著名的洛伦兹变换，这是以荷兰物理学家亨德里克·洛伦兹（1853—1928）的名字命名的，他是爱因斯坦的学长和忠实的朋友。表达式 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 是狭义相对论的核心，它几乎出现在所有相对论的公式中，包括最著名的公式：$E=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}c^2$，这个公式就是 $E=mc^2$。[3]

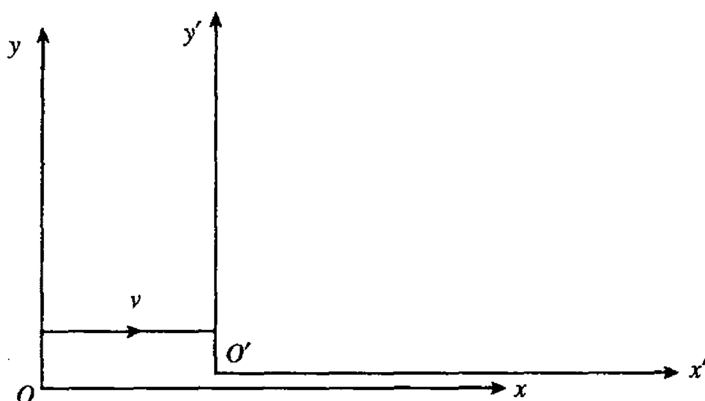


图 14-1　相对移动中的两个参照系



1905 年，爱因斯坦在受人推崇的杂志《物理学年刊》第 17 期上发表了他的理论（在同一期上还发表了他的另两篇文章，每篇文章都极其重要）。开始时，人们的反应比较迟缓。作为一名行外人，当时他甚至没有学术职位，专业物理学家中几乎没有人知道爱因斯坦。但是，少数科学家却注意到了。其中，首先相信这一新理论的人是爱因斯坦在苏黎士瑞士工业学院的老师赫尔曼·闵可夫斯基（1864—1900）。闵可夫斯基出生在俄罗斯，他来到哥尼斯堡，在那里获得了数学理学博士。后来他来到苏黎士，再后来又到达哥廷根，这里是当时世界负有盛名的数学研究中心。开始时，闵可夫斯基对在工业学院作为其学生的青年爱因斯坦评价很低，不久后他也许会后悔做出这个评价。当爱因斯坦发表了他的相对论的论文后，闵可夫斯基立即成为他的一名崇拜者。

观察方程(2)，其两侧的样子与毕达哥拉斯定理非常相似，闵可夫斯基对此感到非常震惊。在三维坐标系内，从原点到点（x，y，z）的半径向量的长度 d 是 $d^2=x^2+y^2+z^2$。现在，假设这个坐标系绕其自身的原点在空间中旋转，点自身保持固定。于是，点（x，y，z）的新坐标是（x'，y'，z'），当旋转角度和旋转方向已知时，我们可以从原坐标（x，y，z）

求得这个点的新坐标。但是，在这一过程中有一个量不发生变化：这就是半径向量的长度。也就是说 $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$。换句话说，表达式 $x^2+y^2+z^2$ 是旋转下的不变量。

闵可夫斯基马上看出这种旋转与方程(2)之间的相似性。但是，有两个小毛病。其一，在这里我们考虑 4 个变量，因此，要获得有价值的比较结果，我们就应该使用四维坐标系（x，y，z，t）来研究。然而，大约 50 年前，黎曼已承认了第四维，所以这实际上不是什么问题。第二个问题比较严重：这个方程两边的第四项，即 c^2t^2 和 $c'^2t'^2$ 的符号是负号，这显然不是毕达哥拉斯定理的形式。

就在那时那刻，闵可夫斯基灵机一动。他断定，既然我们已经能够处理曾一度作为纯虚构的结构而今作为数学实体被完全接受的四维空间，那么为什么不能定义一个新的如今称为 $i=\sqrt{-1}$ 的虚坐标呢？因此，闵可夫斯基引入了一个新变量，$m=ict$。因为，$m^2=(ict)^2=-c^2t^2$，所以方程(2)可以转变成下面的整齐形式

$$x^2+y^2+z^2+m^2=x'^2+y'^2+z'^2+m'^2 \tag{4}$$

也就是说，量 $x^2+y^2+z^2+m^2$ 是洛仑兹转换下的不变量。因此，在闵可夫斯基的解释中，从（x，y，z，t）坐标系到（x'，y'，z'，t'）坐标系的转换相当于四维空间（x，y，z，m）中的旋转。

这不仅仅是一个数学方法。1908 年，闵可夫斯基在他的题为“空间和时间”的讲座中，声称不能再把空间和时间看成是分离的实体，必须把它们看成一个统一体，是不可分割的实体，进而称其为时空。通过给第四维赋予一个物理实体，闵可夫斯基把它引入到主流文化中。四维时空改变了我们对这个世界的理解，改变了我们的思想模式，渗透到了我们的语言，甚至以立体形式和超现实主义的方式进入到了艺术领域。闵

可夫斯基进一步把他的思想发展成为强大的数学工具，把三维空间的向量代数和向量微分扩展到四维时空。根据闵可夫斯基的解释，四维时空的每一个事件定义一个向量（x，y，t，z），称其为世界向量。例如，两个人约定某天下午 7 点在曼哈顿第 5 街和第 42 街的交叉路口相会，这样的约会定义了坐标为（5，42，7，$7ic$）的一个事件，其中 c 是光速（这里的坐标指的是纽约城的网格地图；$z = 0$ 表示曼哈顿位于海平面上，7 表示约会日期的时间）。

世界矢量的大小（即长度）是

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2+m^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2-c^2t^2} \tag{5}$$

两个不同事件定义了时空间隔，它的长度由下面的距离公式给出：

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+(m_2-m_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2} \end{aligned} \tag{6}$$

就像我们用分析几何的距离公式求得空间中两点间的距离一样，公式(6)使得我们可以求时空中两个事件间的距离，即它们在空间和时间两个方面的间隔。再利用上面的例子，如果两个朋友第二次约会，时间是同一天的下午的 10 点，地点是第 3 街和 34 街的交叉路口，那么这两个事件的距离是

$$\sqrt{(3-5)^2+(34-42)^2+(0-0)^2-c^2(10-7)^2}=\sqrt{68-9c^2}$$

闵可夫斯基的工作所带来的影响就是把狭义相对论的性质从一个基于物理直觉的简单理论变成一个高度抽象的数学课题。据传，爱因斯坦这个在工作总是寻找简洁性的人抱怨说：“因为数学家抨击了相对论，我自己不再理解它了。”[4]但是，他不久就在闵可夫斯基的公式中找到了他研究广义相对论所需的强大数学工具。

悲哀的是，闵可夫斯基没有见证他的思想所带来的革命。1909年1月12日，他死于腹膜炎，还不到44岁。临终时他悲叹道："真遗憾，我在相对论还处于发展阶段就死去了。"[5]



无论是学术书籍还是流行书籍，很多都讲述了广义相对论的故事，因此这里不再详细陈述。总之，爱因斯坦没有满足于狭义相对论（"狭义"就是因为它只适合于两个观测者以不变的速度相对运动时的特殊情况）。他不满足是由于不能接受牛顿的"超距作用"概念——一种将太阳引力瞬间传递给相距大约150 000 000公里的地球的无形手段。[6]这一概念无法用实验证明，在任何情况下它都与狭义相对论的基础原理相冲突，也就是说，宇宙中没有任何东西（包括引力）能比光传播得快。由于以太暗示宇宙参照系是绝对静止的，所以爱因斯坦在废除以太后，1907年又开始废除超距作用的思想。这一次，他求助于几何学。

根据爱因斯坦的观点，光是空间中传播信号最快的途经，因此它一定总是沿最短路径传播的。在没有物质的情况下，这条路径是时空中的直线。但是，如果在其路径上放置物体，那么光将会弯曲，这不是因为有什么力作用于它，而是这个物体的存在引起了时空的弯曲。这种情况通常比作将一个光滑的球放在柔软的膜上。如果把球拿开，膜就会恢复平坦。而把球放在它上面时，这个膜就会弯曲，迫使这个球沿其自身重力确定的路径运动。正如物理学家惠勒（1911—）对此所作的评价："物质告诉空间如何弯曲，空间告诉物质如何运动。"

为了使其理论更加丰满，爱因斯坦需要一种他当时还不是很熟悉的数学工具：弯曲的n维空间的黎曼微分几何。我们曾听过这样的故事：爱因斯坦在学生时代数学非常不好，这相当夸张且没有事实根据（正如

补充 5 提到的，爱因斯坦在孩提时就已经证明了毕达哥拉斯定理，这不是数学不好的特征）。然而，在爱因斯坦科学生涯的初期，他确实相信简单的数学足以使他挑战经典的牛顿物理。不久，他就意识到之前的想法是多么天真。

黎曼几何促使一个新的数学概念——张量产生，这是我们熟悉的 n 维向量按某些规则扩展到 $m \times n$ 个组成部分的结构。张量分析（也称绝对微分学）主要是由意大利的数学家里奇（1853—1925）和他的学生列维-奇维塔（1873—1941）发明的。这是一门高度抽象的学科，任何试图用非技术性语言对此给出解释都必然是不充分的。当爱因斯坦开始研究广义相对论时，他对这一学科缺乏必要的知识。在失望中，他求助于自己苏黎士学生时期的一位老友马塞尔·格罗斯曼，他向爱因斯坦讲授了张量分析的初步知识。

武装了必要的数学工具，已经身为令人尊敬的柏林皇家物理研究所所长的爱因斯坦得以在 1915 年末完成他的理论，并于次年发表了这一结果。它被誉为迄今最精致的理论而受到欢迎。不久，在 1919 年 5 月 29 日发生日全食期间，这一理论得到了证明。人们观测到了在太阳附近经过的星光的弯曲，并发现完全符合爱因斯坦的预测。[7]那一年的 11 月 6 日，在伦敦召开的皇家科学院特别会议上，这些结果公之于众，一夜之间，爱因斯坦举世瞩目。



广义相对论的核心是*等效原理*，据说是爱因斯坦在试想一个人从屋顶掉下来时想到的（这个人幸存了下来并告诉了他事情的经过）。爱因斯坦假设，这个人应该不会感受到任何引力：他是失重的。但是，假设同一个人被关在空间中的一个电梯里，远离地球且不受任何引力干扰。如

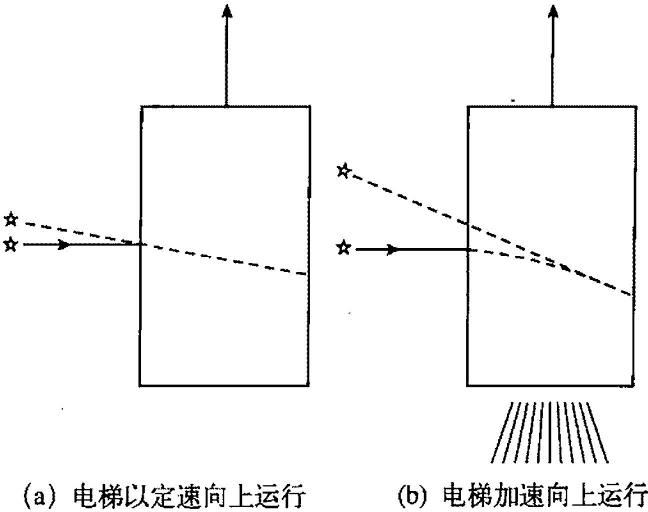
果这个电梯以精确的自由落体加速度（大约是 9.81 米/秒 ^{2}）被拉起，那么里面的人实际上应该感觉到自己被引力压到地板上：他的重量应该与他回到地球、站在实地上的重量相同。这种“思想实验”是爱因斯坦论证时喜欢的一种模式，使得他确信加速度与引力之间没有差异：这两个东西是完全相同的。

现今，宇航员因失重漂浮在太空船中的画面已经司空见惯，等效原理也不再神秘了。但是在 1907 年，爱因斯坦开始考虑引力的性质时，这种想法并不明显。空中旅行尚处于初期，太空飞行更如科幻小说，一个人所能体验的最快速度是快速列车的速度（事实上，最初推崇相对论的人都用列车作例子）。所以，等效原理获得广泛接受还需要时日。然而，更困难的是，爱因斯坦使用数学——张量代数和微积分学，来详细描述他的理论。这个故事的下文是，当广义相对发表后，全世界只有三个科学家能够看懂它，爱因斯坦本人是其中之一。当时，英国杰出的天体物理学家和相对论的早期支持者爱丁顿（1882—1944）（就是他组织了 1919 年的日蚀考察）在讲这个故事时，嘲弄地说：“谁是第三个人？”

爱因斯坦又在思考第二个思想实验。假设电梯以相对某个参照系不变的速度运行。让来自遥远光源（比如说星星）的一束光通过墙壁上的一条小裂缝进入到电梯里（图 14-2a）。当这束光撞到电梯内壁时，电梯只上升了一个微小距离，所以这束光撞到电梯内壁的位置相对裂缝略低一些。这束光的路径仍是直线，但是它与原来的方向略有偏斜。电梯上没有意识到自己在运动的人，也许会把这种小偏移解释为是由于光源方向的微小改变造成的。这就是*光行差*现象，自 18 世纪就已被知晓，而且因地球围绕太阳运行而引起的恒星每年微小的位置偏差是可观测的，因此它与相对论无关。

但是，现在假设电梯被加速拉升。光束在电梯里面的路径就不再是

直线了，它会弯曲（图14-2b)。对于乘客来说，由于不知道自己被加速，会对光束的弯曲觉得奇怪。爱因斯对这一情况给出的解释是逻辑推理的典范。因为这位乘客有理由相信他在地球引力场中站着没动，结论就是必然的了：引力场中的一束光偏离了它的直线跑道——它弯曲了。简单地说，这就是广义相对论的实质。



(a) 电梯以定速向上运行　　(b) 电梯加速向上运行

图14-2　光束在电梯里的路径

现在，一方面是对此给出权威的解释，另一方面是给出精确的数学公式，利用这个公式就可以实际计算出弯曲的量。这里就是爱因斯坦需要张量分析的地方。正如他所看到的，任意给定位置上存在物质，都会使邻近时空的几何形状发生弯曲。这种弯曲可以表示成为一种度量，这就是黎曼50年前构思出来的度量，但是，现在要把它运用于四维时空。这个度量的形式如下：

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j$$

其中，$4 \times 4=16$ 个系数 g_{ij} 是时空中物质分布的表示，它们就是对称引力张量的分力。[8]这一度量成为广义相对论的数学特征。引用数学历史学

家库利奇（1873—1954）的话说，"在 20 世纪，对欧几里得的崇敬已变成对微分方程 $ds^2=\sum_{ij}g_{ij}dx_idx_j$ 的崇敬。" [9]



伴随度量 $ds^2=\sum_{ij}g_{ij}dx_idx_j$，我们走了一遭。大约在公元前 570 年，萨摩斯岛的毕达哥拉斯证明了使他名垂千古的一个关于直角三角形的定理。他也对宇宙有过思考，并试图把宇宙的工作原理与音乐和声联系起来。25 个世纪之后，另一位伟大的智者爱因斯坦利用毕达哥拉斯定理，将其极大地扩展并推入四维时空，系统地阐述其自己的宇宙设想。毫无疑问，他们之所以能够相会，是因为这两位智者在他们崇尚的宇宙之优美和和谐之中找到了共同的纽带。

注释和参考文献

注：本章开篇的铭文中引用的"空间和时间"是闵可夫斯基在德国科学家和医生协会的一次会议上发表的讲演题目，这次会议于 1908 年 9 月 2 日在科隆举办。引用于 Ronald W. Clark, *Einstein: The Life and Times* (AvonBooks, 1972), p.160。

[1] 这里的"时间"一词意义上有些模糊，其真实的意义是时间速率。比如说，生活在地球上不同时区的两个人把他们的手表设置到不同的时区，但是这两块手表滴哒声的速度是相同的，因为它们以相同的速度（地球绕太阳运动的速度）穿越空间，属于相同的参照系。

[2] 也许没有人能比爱因斯坦在他的书《相对论：狭义和广义理论》中对这一推导给出的解释更好（Henry Holt and Company, 1920），附录 1。

[3] 这里的 m 是运动粒子的质量，它自身也是速度 v 的函数：$m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，其中，$m_0$ 是这个粒子的静止质量。

[4] Clark, *Einstein*, p.159。

[5] 同上，p.160。

[6] 牛顿自己不满意这个概念，但勉强地采用了它，因为没有更好的可行假设。

[7] 这一历史事件的余波已被多次描述过了，可以参阅 Clark，*Einstein*，pp.263-264 和 284-291。然而，最近人们对这一日蚀结果的正确性产生很多怀疑。参阅 John Waller, *Einstein's Luck: The Truth Behind Some of the Greatest Scientific Discoveries*(Oxford University Press, 2002)，第 3 章。

[8] 实际上只有 10 个独立的系数，因为 $g_{ij}=g_{ji}$（参见第 12 章）。

[9] *A History of Geometrical Methods*(Dover, 1963)，p.78. I ，把 Coolidge 的 a_{ij} 变成 g_{ij} 正好与本章所使用的记法一致。

补充 10　四个毕达哥拉斯谜题

> 如果没有谜题要解决，那么也不会有什么问题要问；如果没有什么问题要问，那么这个世界会是什么样子？
>
> ——亨利·迪德内，《数学中的娱乐》，p.v

亨利·欧内斯特·迪德内（1857—1930）被誉为英格兰最伟大的数学谜题制造人。他从没有接受过数学方面的正式训练，但是他有一个天赋，就是解决挑战习惯思维的难题。他写了六本关于娱乐数学的书，其中第一本是《坎伯特雷谜题》，[1]根据乔叟《坎特伯雷故事集》的人物写成。在《坎伯特雷谜题》中，我们找到了下面四个，引用如下。

75 蜘蛛和苍蝇　在一个测得长为 30 英尺、宽和高各为 12 英尺的矩形房间里，一只蜘蛛在某一墙壁的中央距天花板 1 英尺高的点 A；一只苍蝇在对面墙壁中央距地板 1 英尺的点 B（参见图 S10-1）。为了能捕到苍蝇，蜘蛛所要爬过的最短距离是多少？当然，这只蜘蛛从不会掉下来，也不会利用它的蜘蛛网，而是堂堂正正地爬行。[2]

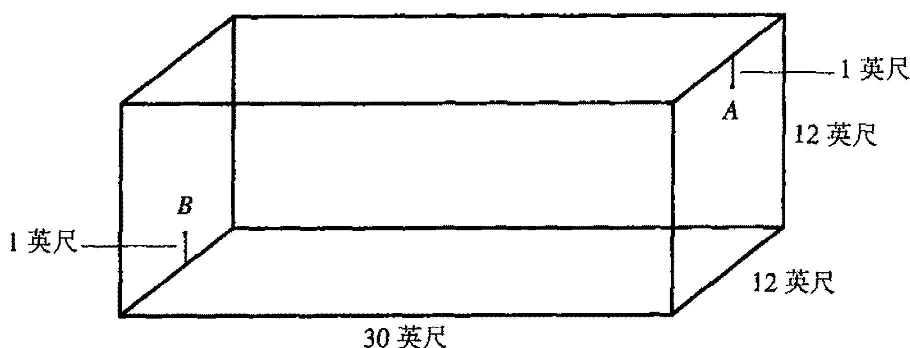


图 S10-1　蜘蛛和苍蝇

我们大多数人都可能说是直线路径：从蜘蛛的最初位置向下直走 11 英尺到地板，然后沿地板的中心线走 30 英尺，再向上走 1 英尺到达苍蝇的位置。这是“显然的”。这样的总距离是 42 英尺。然而，还有更短的路径。你能找到吗？为了不让大家扫兴，我将在附录 H 中给出谜底。



还有一个称为“毕达哥拉斯方块拼图”的谜题：如何把一个方块与一个大方块的四个不等部分组合起来，形成一个更大的方块（图 S10-2）。[3] 关于两个给定正方形的面积和等于另一个新正方形面积，这道谜题间接地与毕达哥拉斯定理相关。尽管这个谜题看似有些简单，但是答案却不是很容易找到。我将在附录 H 中给出它的答案。有趣的是，1917 年，迪德内给出毕达哥拉斯定理的一个类似的构造性证明（图 S10-3）。[4]

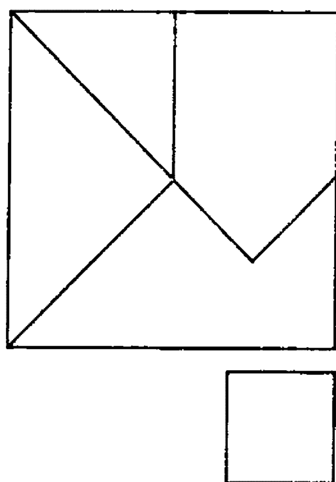


图 S10-2　毕达哥拉斯方块拼图



下面是一个相对容易的问题，取自《九章算术》的第 9 章，这是一部中国汉朝时期（公元前 206—公元 220，参见第 5 章）的中国著作。[5]

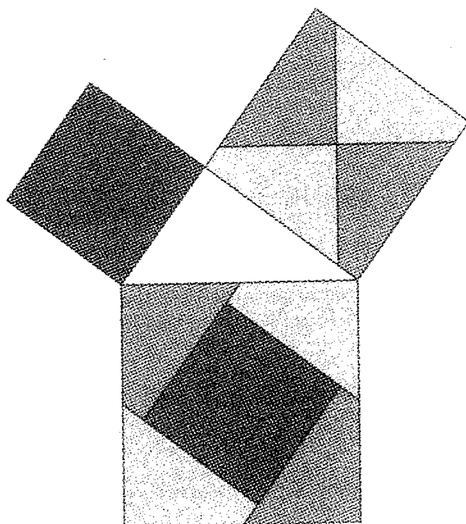


图 S10-3 毕达哥拉斯定理的迪德内证明

已知：一棵高 20 尺的树的周长为 3 尺。一棵木薯葡萄藤在这棵树上绕了 7 次到达树顶。那么这棵葡萄藤的长度是多少？

答案：29 尺。

附录 H 给出了具体求解过程。



再来一个，这个问题取自于《丽罗娃底》（"美丽"），是大约公元 1150 年印度作家婆什迦罗为他女儿写的一部作品，据说是因为占星家预测她女儿不会结婚，他写这部作品来安慰女儿。

15 腕尺高的柱子底下有一个蛇洞，一只孔雀在这根柱的顶点栖息。它看到在离这根柱子高度 3 倍的地方有一条蛇正向洞口爬来，就猛扑向这条蛇。请快速说出，在二者前进速度相等的情况下，它们在距离这个洞口多远的地方相遇？[6]

"快速说出"的意思可能是读者应该只用脑子想，不许用纸和笔。你会做吗？附录 H 给出这一问题的答案。

注释和参考文献

[1] （Dover, 1958）。

[2] 同上，pp.121-122；答案在 pp.221-222。关于迪德内生平的简单介绍可以在 David Daring, *The Universal Book of Mathematics*(John Wiley, 2004)中的 p.98 找到。还可以参阅网页：http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Dudeney.html。

[3] Darling, *Universal Book*, pp.261-262 和 371。书中没有指出这个谜题的作者。

[4] 伊夫斯的著作，pp.95-96。

[5] 文献：Frank J.Swetz and T.I.Kao, *Was Pythagoras Chinese? An Examination of Right Triangle Theory in Ancient China* (Pennsylvania State University Press, National Council of Teachers of Mathematics, 1977), p.29。

[6] 伊夫斯，p.241。关于婆什迦罗和《丽罗娃底》的更详细内容，可以参阅史密斯，Vol.1，pp.275-282。

第15章

它是通用的吗

> 当然，毕达哥拉斯定理是所有结构的基础。这个星球上的任何结构都是以它为基础的。
>
> ——加来道雄，《超空间》，p.37

根据卡尔·萨根的小说改编的电影《接触未来》中，一组天文学家正在专注地听着来自银河系微弱的无线电信号，并用超大盘式天线进行收集。突然，他们辨别出下面一组类型的信号：--，---，-----，-------，-----------，…：2，3，5，7，11，…，这些是从小到大的素数！天文学家得出结论，这一定是来自遥远文明的名片，试图引起我们的注意。他们继续推理，这些信息好像是以那些构成所有数的素数为基础的。如同周期表中的元素，这些素数保持着它们的特性，而不考虑它们出现的周围环境。例如，一个数是否为素数与书写它们时使用的进制无关。它们肯定是独立人类思维而存在于宇宙之中，这使得它们成为开始进行银河系间对话的理想手段。瞬间的兴奋之后，这些天文学家们向国家安全局汇报了这个令他们振奋的消息。反应呢？“什么是素数？”

素数之所以重要，是因为每一个大于 1 的正整数都可以唯一地写成素数之积，以 12 为例，我们有 12=3×4；而 4=2×2，所以 12=3×2×2。即便我们以不同的乘积开始，仍可以得到相同的素数因子：12=2×6，而

6=2×3，所以 12=2×2×3；除了这些因子顺序不一样外，因子是完全相同的。这个事实就是所谓的*算术基础定理*，它是研究整数的数论的核心。

素数总是含有一定的神秘色彩，这也许是因为很多关于素数的问题至今还没有解决。欧几里得的《几何原本》卷 IX 的命题 20 中，欧几里得证明素数是无穷的。孪生素数，即形式为（$p, p+2$）的素数对如何呢？它们似乎相当普通：(3，5)，(5，7)，(11，13)，(17，19)，…，(101，103)，…。你甚至可以找到更大的数，例如（29 879，29 881）。写这本书时，最大的孪生素数是 2006 年发现的 $100314512544015\times 2^{171960}\pm 1$，两个素数都有 51 780 位。[1]有多少这样的孪生素数存在呢？没有人知道。大多数数学家相信有无穷多个，但是这还有待证明。另一个还没有解决的著名问题是*哥德巴赫猜想*。1724 年，在给欧拉的一封信中，身为俄罗斯帝国学院数学教授及后来的沙皇政府外交官的哥德巴赫（1690—1764）猜测到，每一个大于 2 的偶数总是两个素数的和：4=2+2，6=3+3，8=3+5，10=5+5（也可以是 3+7），12=5+7，等等。尽管计算机计算表明这一猜测对于非常巨大的偶数仍然成立，但是还是需要证明。

直至近期，素数仍是数论中唯我独尊的领域，它以其朴素之美而缺少实际应用成为数学的一个著名分支。但是这种情况不再持续。19 世纪 80 年代，素数失去了它高贵的地位，沦入世俗事物的领域：现在，它们在确保传输文档的安全性的计算机通信中担当了重要角色。另外，随着个人计算机的普及，素数已成为大众科学。在国际项目“互联网梅森素数大搜索”（GIMPS）中，全世界范围内大约有 120 000 名业余数学爱好者和专业数学家开始搜索形如 2^n-1 的特殊素数，其中 n 本身也是一个素数。这就是知名的*梅森素数*，以 17 世纪法国男修道士马林·梅森（参见第 2 章）的名字命名。我们不知道这样的素数有多少，在写这本书的时候，已知的最大素数是 $2^{30402457}-1$，这是一个 9 152 052 位的数，

如果把它打印出来大约有 4000 页。[2]毫无疑问，素数已经离开了纯数学的象牙塔，进入到日常生活的领域。

一旦你陷入素数那无法抵御的诱惑之中，就会因此而发狂。但是，素数是否真的如众多痴迷的爱好者所想的那样具有普遍性呢？在我作为物理学本科生的四年里，以我的记忆，素数从没有出现过。毕竟自然科目是以度量为基础的，当你测量一个量时，不管是一张桌子的长度、一个原子的重量，还是太阳的温度，你根本不考虑结果是素数还是合数。素数在构筑现代科学框架的牛顿万有引用定理、麦克斯韦电磁理论以及爱因斯坦相对论等伟大的理论中从没有担当什么角色。即便是牛顿的伟大数学成就——微积分的发明，也只来源于他的理物学直觉：微积分处理连续变化的量（如他所说的“流数”）。在一个所有事情都在变化的世界中，根本没有非连续、永恒不变的素数的位置。

我们举一个非科学领域的例子。毫无疑问，罗马人的社会是古代世界技术最发达的社会。他们的战争机器给周围的敌人带来恐惧，他们在工程方面的成就，包括至今仍耸立的建筑物和桥梁，是一种传奇。罗马人的确知道大量的应用数学知识，否则不会达到如此出神入化的境地。但是，纯数学不是他们的所爱。尽管罗马人认为自己是艺术和科学领域的伟大希腊传统的执行者，但是他们对数学的贡献却微乎其微，他们的科学家是建筑结构领域的科学家，而不是像素数这样抽象数学的创造者。



所以，如果素数不像我们普遍认为的那样具有普遍意义，那么它们又是什么呢？也许我们应该回到几何学。在儒勒·凡尔纳的经典科幻著作《从地球到月亮》（1865）中，一群自称射击俱乐部的太空狂热者正在计划着月亮之旅，一尊设立在佛罗里达的巨炮会将他们发射至月亮。与

这些人交谈，他们的会长如是说。

> 我认为大多数探险只是纸上谈兵，因为他们没有真正的手段与这个夜晚的发光体建立联系。但是，我还应该加一句，很多实践者已经尝试着与月亮取得实质性的联系。例如，几年前，德国的一位几何学家建议派一小队科学家去西伯利亚大草原。按着这一宏大的计划，在那里，这些科学家将搭建以发光材料为外壳的巨大几何图形，包括直角三角形斜边上的正方形（法国人俗称其为“笨人桥”）。这位几何学家认为，每一个拥有智慧的生物都应该理解那个几何图形的意义。如果存在的话，月居人（月亮上的居民）将通过回应相同的图形来表示他们已经明白其中的意义。一旦建立起联系，就很容易创建一个字母表，从而通过这些字母与月球居民交流。[3]

通过各种资料考证，这位“德国几何学家”不是别人，就是高斯。[4]想起来的确很奇怪，伟大的高斯会有这样天真的想法。但是，19 世纪的很多人，包括很多知名的科学家，都相信行星甚至月亮肯定有智慧生物居住。唯一的问题是，这些宇宙外星的世界是否足够发达到能够与我们取得联系？如果是这样，他们一定与我们一样拥有相当的数学知识，这些知识当中完全有可能包括毕达哥拉斯定理。

无论这个关于高斯的故事是真是假，但它表明我们人类对数学经久不衰的信心。即使在这里，我们还是可以提出一些问题。显然，毕达哥拉斯定理是每一个应用数学分支的重要基础，但我们不能忘记它的局限：这个定理只适用于平面，或者能够没有破损地展开成平面的表面。如第 12 章所述，在球面上这个定理不再成立。

当希腊人发展其几何学时，他们不是在真空中这样做的。尽管我们

认为欧几里得的《几何原本》是严格数学表示的典范，是完全基于逻辑推导而来的，但是我们应该记住，那里所讨论的基础几何概念都依赖于我们生活的物理世界。点是由笔在纸上创造的点的理想化表示，直线表示两点间的最短距离，直角是铅锤线与地面所成的角。尽管希腊人知道地球是球体，但是，他们是从普通的原生态材料和日常生活中的普通对象，以及在日常生活中我们几乎没有生活在这个球体上的感觉这样的事实中创建了他们的几何的。因此，毫无疑问，欧几里得几何总的来说是平坦空间的几何。在《几何原本》中讨论的三维对象（如立方体或者八面体）都有平坦的表面，可以通过二维剪裁构造出这些立体图形。[5]

但是，让我们想象一下如果地球比它实际要小很多，比如说直径只有 10 公里。在这样一个小行星上，我们每向前迈出一步，就会感到我们脚下的地面是弯曲的。在这样一个缩小的星体上，生命是否可以进化则另当别论。通过它非常小的引力，包围在这样一个球体外面的任何大气都将快速逃离到太空中，没有了大气，正如我们所知道的那样，就不可能有生命。然而，最近天文学方面的进步已导致奇异物体的发现，几年前它们的存在几乎是不可想象的，其中包括有上百个坚固的行星绕着它们自己的星星旋转。直径只有几公里，有与地球相同的重量，拥有大气层，甚至提供了生命的港湾，存在这样的行星并非不可思议。如果智慧生物居住在这样的星球上，他们也许会创造自己的几何来满足其特殊需要。这种几何可能不包括毕达哥拉斯定理，因为在他们的世界里它不再重要。

但是，我们不需要到其他世界去认识受到我们所生活的物质世界影响的基础数学概念。根据经常听到的故事，直角坐标系就来自于某天早晨赖在床上看着天花板上一只苍蝇的笛卡儿。他认识到这只苍蝇在任何时刻的位置都可以由两个数来确定，即通过苍蝇到每一面墙的距离来确

定。但是，假设笛卡儿生活在圆顶式的建筑中，他还能够有同样的想法吗？在圆顶房间中，笛卡儿很有可能会发现球面坐标，我们通常利用这种体系的经度和纬度定位地球上的点。如果是这样，我们熟悉的分析几何的距离公式可能会被复杂的公式取代。所以，我们对数学的思考要受到我们所生活的环境的影响。

当然这些反思完全是爱因斯坦式的假象“思想实验”。根本上，它们都归结于这样一个问题：*数学是大脑的产物还是独立于大脑而存在的*？或者，换句话说，数学只是我们用来描述物质世界的工具，还是说它是这个世界的必然结果呢？这些的确是非常重要的问题，涉及数学与宇宙哲学的边界问题。几个世纪以来，数学家和哲学家就一直在争论这些问题，但至今没有明确的结论。



在波多黎各里的阿瑞西波以南的山脉环绕而形成的自然盆地，坐落着世界上最大的无线电望远镜，这是一个直径305米的巨大盘状天线。1963年由康奈尔大学安装，十年后它的部件已被彻底更新，并于1974年11月16日重新开始工作。为了纪念这一盛典，他们给距离我们大约24 000光年的武仙座的星团M-13传输了一条编码信息。这条信息是由有1 679个0和1的串组成的，当被破解时，这条信息会提供来自它的发送者——地球上的人类的身份证。而且，为了破解它，你必须知道1 679是两个素数之积73×23。这可能会给截取这条信息的人两个选择：用二维格式排列二进制数字，一种是有73行，每行23位；另一种是有23行，每行73位。第二种排列方法将展示出发送这条信息的盘状天线的原貌，以及发送这条信息的物种的详细识别信息（图15-1，中心部分的螺旋形状代表DNA分子）。外星智能探索SETI的创始人之一法兰克·德雷克

戏剧性地描绘了这一事件："到了典礼和午宴结束，每一个人离开会场向公共汽车涌去的时候，这条信息到达了冥王星轨道附近。它已准备好离开太阳系，不是经过几年的飞行，而只是几个小时的旅行，因为用的是太空飞船。"[6]

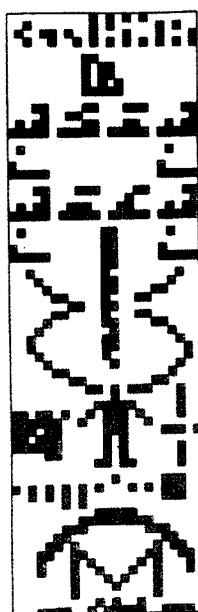


图 15-1 （破解后的）阿瑞西波无线电信息

所以要破解这些信息，接收者必须精通数学，可以对整数进行素数分解。实际上，任何人都可能截取到这条信息，并小心地传送给我们一个答案，最后我们可能会碰到上面所提出的问题——数学在整个宇宙是否完全一样，是否是独立于它的发明者存在的。如果是，数学将成为国际间，乃至星际间的一种语言，只有那些有数学修养的人才能明白它。而且，我们将不得不等上大约 48000 年这条信息返回地球，如果它的接收者要花很大功夫才能破解它，也许还要多等几年。做好接受的准备！

注释和参考文献

[1] 根据网站 The Prime Pages，http://primes.utm.edu/index.html。

[2] 同上。

[3] Walter James Miller, *The Annotated Jules Verne:From the Earth to the Moon* (Gramercy Books, 1995), p.13。

[4] 高斯曾经提到这一主张（据我所知没有经过证明），它在许多书中变着花样出现。例如，请看 David Darling，*The Extraterrestrial Encyclopedia: An Alphabetical Reference to All Life in the Universe* (Three Rivers Press, 2000), p.166；以及法兰克·德雷克和大卫·索贝尔，*Is Anyone Out There?—The Scientific Search for Extraterrestrial Intelligence* (Delta, 1994), pp. 170-171。Miller在给 *From the Earth to the Moon* (p.13) 的注释中说：

> 这位德国几何学家高斯（1777—1855）也以他在天文学中的研究闻名于世，提出使用毕达哥拉斯定理证明中的图形来标识地球：三边上有正方形的直角三角形。直线应该用深色的森林宽带形成，而被包围空间则应该种植小麦这样颜色鲜艳的农作物。但是，实际上是另一位德国天文学家约瑟夫·利特罗（1781—1840）建议图形应该被点亮。他建议在撒哈拉大沙漠挖掘等边三角形这样形状的壕沟：我们可以往里灌水，覆上煤油，并在夜晚点燃。

[5] 卷XII和卷XIII简单讨论了这一球体，但主要是关于5个正多面体的讨论，没有关于其表面固有性质的讨论。

[6] 德雷克和索贝尔的 *Is Anyone Out There?—The Scientific Search for Extraterrestrial Intelligence*，p.184。对于为什么选择星团M-13为目标，德雷克说："我研究了星空图，发现在典礼那天的下午1点左右——这是安排典礼的时间，300 000左右的星星（以及可能同样数目的行星）形成的稠密星团将靠近我们头顶。这就是我们的目标，武仙星座中的球状星团M-13。这一星团距我们24 000光年的事实并不能使我的热情有丝毫减弱。"

第16章 反思

> **在数学中，2的幂出现的频率高于其他任何数。**
>
> ——大卫·韦尔斯，*The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*，p.42

有人经常问我：数学到底是什么？很多人认为它只局限于数和计算领域。那些学过微积分的人知道还有一种“更高级的”数学，但是，他们也不清楚其与“现实”世界有什么联系。当然，你总可以引用一句名言：“数学是数学家晚间所做的事情。”但是人们很难满意这样的回答。

那么，数学到底是什么？我认为数学的本质是寻找模式、结构和规律，并探索那些看似毫无关联的对象间的联系，无论这种对象是“真实存在的”还是抽象的。从这一意义上讲，数学与艺术，特别是与音乐类似。正如特定主题和节奏的模式在音乐中反复出现一样，某些代数表达式也在不同的数学领域中反复出现。图16-1给出莫扎特D大调第16钢琴协奏曲（K451）的开篇部分，节奏主题♩♫♩♩从第一小节就控制着整个乐章。这一主题以其多变的形式揭示了莫扎特音乐的特点。在他的所有音乐中，包括他死时还未完成的作品《安魂曲》中，你都可以反复找到这一主题。现在，我们把这一主题与图16-2做个比较。图16-2给出的是数学手册中的积分表，表达式x^2+a^2占据了整整一页。这一表达式（可能使用不同的字母）是整个数学中使用频率最高的表达式：你可以在三

角学、微积分、微分方程、泛函分析以及数论中找到它，在几何中更是如此，它是毕达哥拉斯定理的代数表示。

Piano Concerto No.16 in D Major,K.451: D 大调第 16 钢琴协奏曲（K451）

图 16-1　莫扎特第 16 钢琴协奏曲开篇部分

包含 $\sqrt{x^2+a^2}$ 的不定积分

14.182 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) \quad \text{or} \quad \sinh^{-1}\frac{x}{a}$

14.183 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$

14.184 $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

14.185 $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2+a^2}$

14.186 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

14.187 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$

14.188 $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

14.189 $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

14.190 $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3}$

14.191 $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} - \frac{a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

14.192 $\int x^3\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{3/2}}{3}$

14.193 $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

14.194 $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

14.195 $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2x^2} - \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

14.196 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$

14.197 $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

14.198 $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

14.199 $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

14.200 $\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

14.201 $\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4x} - \frac{x}{a^4\sqrt{x^2+a^2}}$

14.202 $\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2x^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{3}{2a^5}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

图 16-2 数学手册中的一页

这些重复出现的模式来自于哪里呢？在莫扎特的音乐中，它可能来自于他那个时代流行的四步舞曲。莫扎特的大部分作品都是迎合社交活动而写的，如舞会、庆祝招待宴会或者是皇室宴会等，跳舞是这种场合的核心节目。无论是有意还是无意，这些舞蹈的节奏模式都刻入他那富于创造的大脑之中，最终融入到他的音乐之中。

在数学中，表达式 x^2+a^2 无所不在，而且它们通常与毕达哥拉斯定理有直接关系。在三角学中肯定是这样，因为三个“毕达哥拉斯等式”反复出现（参见前言）。同样，在微积分学中也是如此：只要涉及三角函数，x^2+a^2 就有可能出现，如下面的两个积分公式。

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{a}{a^2+b^2} \quad 和 \quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2} \quad (此处\ a>0)$$

但是，现在考虑看似类似的积分

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad 和 \quad \int_0^\infty e^{-ax}J_1(bx)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{b\sqrt{a^2+b^2}}$$

这里，$J_0(x)$和 $J_1(x)$是秩为 0 和 1 的贝塞耳函数，这是两个微分方程中“更高阶”的函数。[1]这些函数无法写成初等函数（多项式函数、分式函数、三角函数、指数函数和它们的逆，以及这些函数通过任意有限组合得到的函数都是初等函数）的“封闭”形式，它们只能被表示成 x 的幂级数。贝塞耳函数与三角函数在外形上有些相似，例如，$J_0(x)$和 $J_1(x)$的图像分别与 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的图像类似，但是，它们不是周期函数：它们的振幅随 x 的增加而减少，而且它们的 x 截距间隔不等（图 16-3）。[2]然而，表达式 a^2+b^2 就像毕达哥拉斯的幽灵一样，神秘地出现在它们的积分中。

我们再返回看一下欧几里得几何。在原理上，没有什么能够阻止我们给出一种完全不同于实际使用的度量，例如，基于公式 $d=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 的

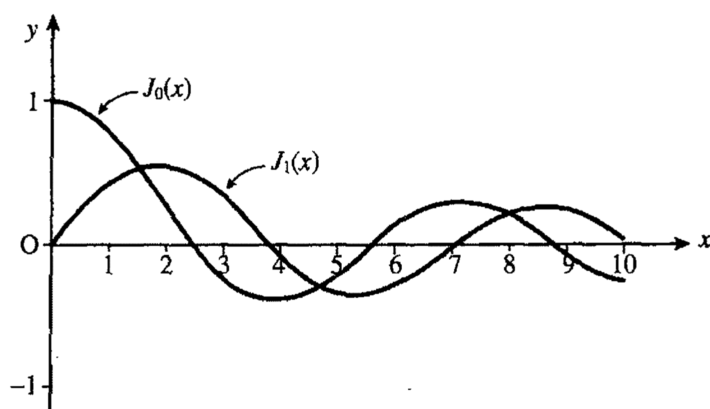


图 16-3 $J_0(x)$和$J_1(x)$的图像

度量。这个度量能够满足我们对距离的所有要求，包括三角不等式（参见第 11 章）。在这一度量下，“毕达哥拉斯定理”的形式变成 $a^3+b^3=c^3$，这是用直角三角形三条边上的立方体的体积取代直角三角形三条边上的正方形面积。[3]在描述非欧几何的某些模型时偶尔使用非传统形式的度量，但是用着都有些不自然。事实是，我们在实践中使用的唯一度量是基于距离公式 $d=\sqrt{x^2+y^2}$ 的二次欧几里得度量，甚至它的一般形式 $\mathrm{d}s=\sqrt{\sum_{ij}a_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j}$ 依旧是二次度量。

所有这一切使我们好奇，是什么使得指数 2 被赋予如此重要的角色，这不仅在数学中如此，在物理中也是如此。牛顿的万有引力定律是一个倒数平方定律，关于电的库仑定律也是。$E=mc^3$？这不像是对的。

但是，也许令人最惊讶的是 2 在数论中的独一无二的地位。数论是一门远离物质世界，同样远离三角学和微积分的学科。今天我们知道的最大素数是梅森素数 2^n-1，以及与它们有关联的完全数 $2^{n-1}(2^n-1)$（参见第 2 章）。我们还想起了费马素数 $2^{2^n}+1$，以及它们与正多边形的关系（第 10 章）。这些至少部分来源于这样的事实：2 是最小的素数，而且是唯一的偶素数，因此在如此尊贵的素数当中被赋予了特殊的地位。但是，在费马大定理中，这样简单的解释是行不通的。为什么对于 $n=1$ 和 $n=2$，

方程 $x^n+y^n=z^n$ 有整数解，而对其他数就没有整数解了呢？2 也许是终极数学常量，其重要性甚至超过了π和 e 吗？请读者自己来确定吧。

注释和参考文献

[1] $J_0(x)$是微分方程 $x^2y''+xy'+x^2y=0$ 的一个解，而 $J_1(x)$是方程 $x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$ 的一个解。这些方程都是以德国天文学家弗里德里希·威廉·贝塞尔（1784—1846）的名字命名的，他在其关于行星轨道的著作中引入了这些方程。这些方程经常出现在数学物理的应用中，例如耳膜的振动。

[2] 这在音乐中有一些影响。圆形振膜的振动是由 $J_0(x)$ 控制的，这一函数的非周期性使得这些振动具有不和谐的音调。

[3] 等式 $6^3+8^3=9^3-1$ 给出一个反例。

结 束 语

萨摩斯岛，2005年

> 萨摩斯岛的毕达哥拉斯学派认为人们应该讨论仁、义和利的问题……因为毕达哥拉斯把这些课题作为他毕生的事业。
>
> ——扬布利柯（约公元前330—前250），
>
> 《毕达哥拉斯的生活》的叙利亚作家

2005年12月，我和妻子来到了希腊的萨摩斯岛，向毕达哥拉斯表示敬意。当然，我们没有期望可以找到一处上有匾额写着“公元前580年毕达哥拉斯在此出生”的房子。然而，我们还是想参观一下这位年轻的圣人早年生活的地方，看一下形成这位圣人宇宙观的风土人情。

这次旅行的时机并不太好：时值寒冬，美元对欧元每日下跌，而且由于安全原因使得空中旅行也乐趣不再。但是，我们只有那时有时间前往，委托旅行社的人安排旅程时，他的第一反映是：“为什么2月份去？没有人在严冬去希腊岛。”我们没有听取他的劝告，先去了雅典，然后再坐15分钟的飞机到了萨摩斯岛。当位于碧蓝的地中海上空时，我们看到了波浪，卷曲的浪花拍打着大海，好像有暴风雪的迹象。天气也是如此：当我们靠近这个周围被深深没入海水的山脉环绕的小岛时，飞行员努力在强劲侧风中保持着飞机的平稳。

下飞机后，我们注意到的第一件事是机场候车室那个大大的标牌：“阿里斯塔克斯”（参见彩图4）。这可能是世界上唯一以数学家的名字命名的飞机场，不是毕达哥拉斯，而是他的萨摩斯岛同乡阿里斯塔克斯（大约公元前310—前230）。[1]阿里斯塔克斯被认为是历史上第一位真

正的天文学家。他曾试求过地球距月亮和太阳的距离（他的方法是正确的，但是结果要比实际数值小很多）。[2]他以其非凡的洞察力，主张太阳而非地球是宇宙的中心，这是一个远远超出其时代的思想。

乘坐出租车 15 分钟，我们来到了萨摩斯镇，这个小岛的非正式首府。当我们找到住处安定下来的时候，刮起了大风，不久整个小岛陷入近几年来最大的暴风雪之中。所有航班都被取消，而且每天从希腊主要港口比雷埃夫斯来的渡船也不允许停留在码头，这个码头就在我们旅馆的右前方。在这样一个小地方，这场暴风雪就是每天的主要新闻。后来每个人都告诉我们，就在我们到达的前一天这里还风景如画，而且预计我们离开之后天气又会转晴。当然，这提不起我们的精神。

但是，我们还是不打算让时速 50 英里的暴风雪破坏我们的计划，所以决定在城里转转。不久，我们发现毕达哥拉斯是这里一个家喻户晓的名字：中央广场是以他的名字命名的，还有一条街道、一所高中以及至少一家旅馆是以他的名字命名的（参见彩图 5~7）。这里随便卖的一个旅行纪念品，如T-恤衫、咖啡杯、石膏塑像等，都印有他那带有胡子的头像和他的定理的图形。萨摩斯岛的旅行手册中关于他的介绍就占据了两页，同时附有他的定理的描述。

> 毕达哥拉斯定理：在等腰三角形中，这两条等边上的正方形之和等于斜边上的正方形。[3]

（我必须重复两遍以便确定我是否读正确了，但是它就是这样说的。）由于小岛当时游客寥寥无几，我们无法知道每年夏天到这里的成千游客对此的看法。而当 6 月份游客再次涌来时，并不是因为毕达哥拉斯吸引他们，而是这个小岛上的很多小海滩很出名。我们是一年当中最不同寻常时期的最不同寻常的游客。

第二天早晨，我们乘巴士来到这个小岛东边的毕达哥利翁。坐公共交通我们可以接触到当地人，听他们的对话（即使是外语），分享他们日常生活中的琐事，有些事情是坐出租车遇不到的。可以肯定，出城不到10分钟，我们就感受到了当地人的活力。到了交警检查站，巴士停靠到路边，司机与车外的交通警察交涉了很长时间，然后交通警察板着脸上了车。我们以为这是安全检查，要给他看包，但是他没有兴趣，用希腊语说着什么，对，是对我们说希腊语。当我们说“请用英语”时，他含混地说了句：“系好安全带！”原来这是检查系安全带！整个巴士上人突然大笑起来，我们也高兴地大笑起来，马上就与其他乘客混熟了。

这车可不是胆小鬼敢做的。车里的每个人都在抽烟，包括我们的司机先生，他的正上方正是“不许吸烟”的警标牌。另一个“巴士行进中不可与司机说话”的牌子也不能阻止司机与售票员之间的热烈对话。车上只有十几位乘客，这位司机为什么不自己收车票呢，我不得而知，也许这样就可以雇用两个人，否则只能雇用一个人。

毕达哥利翁是萨摩斯岛第三大城市。20分钟后我们登上一座山顶，从这山顶上可以看到远处的土耳其海岸隐藏在云雾之中。从这里算起，这两个国家只相隔4000英尺。我们的导游手册上说，在某个时期，这个小岛实际上是小亚细亚的一部分，但是一系列的地震把小岛与大陆分隔了开来。这一狭窄的海峡标识了欧洲与亚洲的历史边界。就是从这里，年轻的毕达哥拉斯横渡大海来到小亚细亚的米利都，在伟大的导师泰勒斯的指导下学习。

现代的毕达哥利翁是在近期才得到这个名字的，1955年之前一直叫做蒂加尼。公元前550年，在波利克拉特斯掌权时，把它变成了这个岛的首都，而且人口增长到了30万人。如今，它只是人口只有几千人的小城镇，风景如画地盘踞在蓝色海洋以及其北面和西面的橄榄绿山脉之间。

为了表达对与它同名的这位名人的尊敬，小镇在码头竖立了一尊雕像，雕像俯瞰着这个港口。毕达哥拉斯的一只手里拿着一个三角形，而另一只手指着一根斜柱的顶部，就好像要努力够到它一样（彩图 8）。稍微想象一下，你就可以勾勒出一个直角三角形的形状，但是，没有任何地方提到使毕达哥拉斯的名字不朽的定理。我想夏天蜂拥而至的游客很少有人会真正关心这些，必须承认我有点失望。

真正为毕达哥利翁赢得名声的是公元前 524 年波利克拉特斯建造的穿山隧道。在毕达哥拉斯生活的年代，它用来保证战时城里的供水。这条隧道以设计工程师的名字——欧帕利努斯命名，隧道长 1036 米、宽和高分别为 1.5 米左右，它已经使用了 1000 年。如历史学家希罗多德所说，这是一个非凡的工程壮举，两队人分别从山的两侧挖，并在大约中央地带相会，横向误差大约只有 9 米，纵向误差为 12 米。[4]这一隧道在向公众开放时，你可以在里面行走大约 610 米，但令我们失望的是冬天隧道关闭了。我们不得不再来一次。



如同希腊的一切，萨摩斯岛历史悠久，岛上居民生活富足。它的早期历史非常神秘。最早的记录表明，腓尼基人于大约公元前 3000 年在这里建立了永久的家园。萨摩斯岛（Samos）这个名字相信也是来自于腓尼基语的 Sama，即高地。大约公元前 1000 年，第一批爱奥尼亚人在这个小岛安家。公元前 670 年，萨摩斯岛成为一个民主国家，很快就名声显赫。它因葡萄酒、橄榄树林以及船舶制造而闻名。它所制造的长而快的小船萨迈那（samaina）因其超凡的速度和可以横跨地中海直达埃及的性能而闻名。公元前 650 年，萨摩斯岛的航海家 Kolaios 成为横渡赫丘利斯石柱（直布罗陀海峡）并穿越古代世界边界的第一人。

公元前550年，主要依靠大约150只萨迈那船的舰队，萨摩斯岛本地人波利克拉特斯掌权，不久之后成为当时最令人胆寒的希腊统治者。他是艺术和建筑的伟大的资助者。除了欧帕利努斯隧道外，他还资助了现代毕达哥利翁大港口的修建，建造了古代世界最大的神殿——宏伟的赫拉神庙，以表示对宙斯神的妻子赫拉女神的尊敬。但是，他对权力的贪得无厌使其树敌过多，最后被处死在十字架上。

在接下来的几个世纪里，这个小岛因波斯人、雅典人和斯巴达人之间战线的进退而不断地更替着结盟关系。公元前479年，希腊人在密克勒海峡打败了波斯海军，从而永远结束了波斯人的统治。公元前129年，萨摩斯岛成为罗马帝国的一部分。罗马皇帝奥古斯塔斯经常在冬季参观萨摩斯岛，历史学家普卢塔克告诉我们，这里是安东尼和克利奥帕特拉的静养地。

基督教出现之后，萨摩斯岛受威尼斯人和热那亚人的统治。1453年，热那亚人又把它让给了土耳其人。由于其后一个世纪小岛的沙漠化，它的居民逃到附近的希俄斯岛。然后，土耳其人把它当作自己的家园一样重新入住这个小岛。因对这一统治的反感，萨摩斯岛人举行了起义，1830年在第二次密克勒战役中打败了土耳其人。尽管这个强国把萨摩斯岛关在希腊的门外，但是，在萨摩斯岛王子的领导之下，它得以以半自治的地位存在，这位王子是土耳其苏丹指定的基督教领袖。1913年，奥斯曼帝国随着其在巴尔干战争的失败而日渐衰落，萨摩斯岛又重新回归希腊。[5]



在我们旅行的最后一天，乘巴士来到卡洛瓦西，这是萨摩斯岛最大的城镇和唯一一所大学的所在地。风依然强劲，我们只能大致游览一下这个城镇。在它的中心广场，我们发现了阿利斯塔克斯雕像，这个小岛上另外一位伟大的科学家（彩图9）。大理石地座上用英文和希腊文雕刻

着碑铭，它如下写道。

> 公元前 320—前 250，萨摩斯岛的阿利斯塔克斯。他是发现地球绕太阳旋转的第一人。公元 1530 年，哥白尼抄袭了阿利斯塔克斯的学说。



阿利斯塔克斯常被称为古代的哥白尼，而哥白尼是否“抄袭”了他的学说应该留给历史学家来决定。

到了和这个小岛说再见的时候了。当我们的飞机起飞时，它绕过这个小岛最高的山峰——4711 米高的克科斯山。我想起了导游手册上的一段话。

> 在冬天漆黑的夜晚，当渔夫们在狂风中行进在克科斯山的陡峭山坡上时，他们说看到山顶上有一盏灯，就像一个灯塔一样，指引他们在狂风中走上一条安全的道路。他们说这盏灯就是毕达哥拉斯的灵魂。毕达哥拉斯出生于大约 2500 年前，整个世界得益于他的哲学和数学。他仍然活在萨摩斯岛渔夫的心里。[6]

注释和参考文献

[1] 我一般使用通用英语拼写 Aristarchus 而不是 Aristarchos，尽管后者可能更接近希腊文的发音。

[2] 参见《三角之美》, pp.63-65。

[3] *Samos: The Island of Pythagoras* (Michael Toubis Publications S.A., 1995), p.17。

[4] 在这一建筑艺术中包括一些有趣的数学。参见范德瓦尔登，*Science Awakening: Egyptian, Babylonian and Greek Mathematics* (John Wiley, 1963), pp.102-104。

[5] 这一简短的历史片段基于 Dana Facaros 的 *Greek Islands*(GadoganBooks, 1998), pp.517-518。

[6] *Samos*, p.30。

附录A

巴比伦人是如何估计$\sqrt{2}$的

巴比伦人如何求得YBC 7289上给出的相当精确的$\sqrt{2}$值的呢？如果我们能够有一块附有求平方根的确切方法的泥板书，就会知道这一点，但是情况并非如此。然而，有充分的理由可以肯定他们使用了迭代公式

$$x_{i+1}=\frac{1}{2}\left(x_i+\frac{2}{x_i}\right),\quad i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

有时候，我们称其为牛顿拉夫逊公式。从初始猜测值 $x_0>0$ 出发，把它代入公式中，于是产生值 $x_1=(x_0+2/x_0)/2$。再把这个新值代回到公式中，得到 $x_2=(x_1+2/x_1)/2$，以此类推。如此得到的 x_i 的值都超过$\sqrt{2}$（下面会论证的）；但是，当 i 增大时，这些值快速收敛于$\sqrt{2}$。例如，取 $x_0=1.5$，我们得到 $x_1=1.416\,666\,7$，$x_2=1.414\,215\,7$，$x_3=1.414\,213\,6$，等等。仅仅通过三步，我们就到达了这个正确值的第6位。实际上，就是这个值出现在了YBC 7289上，它用60进制表示为1;24,25,10（参见第1章）。

我们可以利用同样的过程寻找任意正数 a 的平方根，公式是 $x_{i+1}=(x_i+a/x_i)/2$ （$i=0, 1, 2, \cdots$）。为了证实这个公式，我们注意到，如果最初的猜测值 x_0 比$\sqrt{a}$大，那么 a/x_0 就比$\sqrt{a}$小，反之亦然。无论是哪种情况，取它们的平均值$(x_0+a/x_0)/2$ 就可产生一个更好的值。一个著名的定理提到，两个正数的算术平均值不小于它们的几何平均，即$(a+b)/2\geqslant\sqrt{ab}$，二者相等当且仅当 $a=b$。把这个不等式运用到上面的表达式中，我们

得到

$$\frac{1}{2}\left(x_i+\frac{a}{x_i}\right) \geqslant \sqrt{x_i \cdot \frac{a}{x_i}}=\sqrt{a}$$

这表明从 x_1 开始，所有近似值都超过 $\sqrt{a}$（除非我们恰好从 $x_0=\sqrt{a}$ 开始，此时所有 x_i 都等于 $\sqrt{a}$）。

为了证明当 $i\to\infty$ 时，$(x_i+a/x_i)/2$ 趋向于 $\sqrt{a}$，我们需要证明当 $i\to\infty$ 时，第 i 个近似值的误差 $\varepsilon_i'=x_i-\sqrt{a}$ 趋于 0。用 $i+1$ 替换 i，我们有

$$\varepsilon_{i+1}=x_{i+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2}(x_i+a/x_i)-\sqrt{a}$$

上面已经证明，对于所有 $i=1, 2, \cdots$，$x_i>\sqrt{a}$，所以 $a/x_i<a/\sqrt{a}=\sqrt{a}$。把这个不等式代回到最后的方程中，我们求得

$$\varepsilon_{i+1}<\frac{1}{2}(x_i+\sqrt{a})-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(x_i-\sqrt{a}\right)=\frac{\varepsilon_i}{2}$$

这就证明了，对于每一个后继近似值，误差小于其前面值的一半。而这意味着当 $i\to\infty$ 时，$\varepsilon_i'\to 0$，于是 $x_i\to\sqrt{a}$。

这一“分割平均”过程确实是巴比伦人近似平方根的方法，这一假设可以从列出数的倒数的现存泥板书上得知，事先列出数的倒数可以使抄写员容易地把除法问题转化成乘法。[1]

注释和参考文献

[1] 参见 Otto Neugebauer 所著的 *The Exact Sciences in Antiquity* (Dover, 1969), pp.32-34。其他文献提到了一个相关的公式 $\sqrt{a+b}\sim a+b/2a$，其中 $b<<a$，这也可能是巴比伦人求平方根的方法；参见范德瓦尔登的 *Science Awakening: Egyptian, Babylonian and Greek Mathematics* (John Wiley, 1963), p.37 和 44-45。

附录 B

毕达哥拉斯三元组

我们在第 1 章证明了，对于给定的两个整数 u 和 v 使得 $u>v$，u 和 v 互素（除 1 外二者没有公因子）且具有相反奇偶性（一个是偶数，另一个是奇数）[1]，则下面的整数形成基本毕达哥拉斯三元组：

$$a=2uv,\ b=u^2-v^2,\ c=u^2+v^2 \tag{1}$$

即

$$a^2+b^2=c^2 \tag{2}$$

现在，我们证明相反的结论：对于每一个基本毕达哥拉斯三元组（a，b，c），存在整数 u 和 v 使得 $u>v$，u 和 v 互素，且方程(1)成立。

我们首先注意到，因为（a，b，c）是基本毕达哥拉斯三元组，所以 a、b 和 c 除 1 外没有公因子，a 或 b 中必有一个偶数和一个奇数，而 c 一定是奇数。首先，我们证明 a 和 b 不能同时是偶数。如果它们同时是偶数，那么 a^2 和 b^2 同时是偶数，因此它们的和 c^2 是偶数。那么，c 是偶数，所以 a、b 和 c 将有公因子 2，与（a，b，c）是基本毕达哥拉斯三元组的假设矛盾。

现在，我们证明 a 和 b 不能同时是奇数。假设它们同时是奇数，那

① 相反奇偶性是互素的特例，因此无需在此陈述。——译者注

么对于某两个整数 m 和 n，我们可以写 $a=2m+1$，$b=2n+1$。把 a 和 b 分别平方然后加起来，我们得到

$$a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=4(m^2+n^2+m+n)+2=4r+2$$

其中 $r=m^2+n^2+m+n$ 是一个整数。而这表明 a^2+b^2（也就是 c^2）除以 4 余数为 2。另外，因为我们假设 a 和 b 同时是奇数，所以 a^2 和 b^2 也同时为奇数。两个奇数的和是偶数，所以 $a^2+b^2=c^2$ 一定是偶数。于是 c 本身必须是偶数，所以对某个整数 s，$c=2s$。一个偶数的平方可以整除 4（因为 $(2s)^2=4s^2$，这表明它除以 4 余数是 0），于是我们得到一个矛盾的结果，从而证明 a 和 b 不能同时是奇数。因此，它们之中必须有一个是偶数，而另一个是奇数。因为，方程(2)关于 a 和 b 是对称的，为不失一般性，我们设 a 偶数，b 是奇数。

我们可以把 a 写成 $a=2t$，并把它代入到方程(2)中：

$$(2t)^2+b^2=c^2$$

于是有

$$(2t)^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$$

上式可以重写成

$$t^2=\frac{c+b}{2}\cdot\frac{c-b}{2} \tag{3}$$

注意，b 和 c 都是奇数，它们的和与差都是偶数，因此方程(3)中的每一个因子都是整数，这两个整数互素。（如果它们有公因子，那么它们的和 $(c+b)/2+(c-b)/2=c$ 与它们的差 $(c+b)/2-(c-b)/2=b$ 也有公因子。从方程(2)的观点看，这个公因子也是 a 的因子，这与（a，b，c）是基本毕达哥拉斯三元组矛盾。）

现在，方程(3)的左边是一个完全平方数，所以右边也是完全平方数；右边两个因子是互素的，所以它们的素数因式分解一定包含每一个素数偶数次，即右边的每一个因子本身也是一个完全平方数。

所以我们可以写成

$$\frac{c+b}{2}=u^2,\quad \frac{c-b}{2}=v^2 \tag{4}$$

其中，u 和 v 互素且 $u>v$。对方程(4)做加和减，得到 $c=u^2+v^2$ 且 $b=u^2-v^2$。因为 b 和 c 都是奇数，所以最后两个方程都表明 u 和 v 具有相反奇偶性。最后，把方程(4)代入到方程(3)中，我们得到 $t^2=u^2v^2$。从这个方程我们得到 $t=uv$，因此 $a=2uv$。以上就是完整的证明。

附录C

两个平方的和

与毕达哥拉斯三元组相关的一个问题是哪些数（我们只考虑非负整数）可以写成两个数的平方和。显然有些整数可以写成两个数的平方和，而有些数则不能写成两个数的平方和。例如，$5=1^2+2^2$，而 6 则不能写成两个数平方和（当然，每一个完全平方都是两个数的平方和，只要我们把 0 算在内即可）。我们的目标是寻找一个标准来确定给定整数是否可以写成两个数的平方和。

在下文中，我们需要定义数论中的一个概念。我们说，如果两个整数 a 和 b 除以 m 后余数相同，那么它们是模 m 同余的，写作 $a\equiv b(\text{mod } m)$。例如，$7\equiv 11(\text{mod } 4)$，因为 7 和 11 除以 4 后，二者的余数都是 3。类似地，$13\equiv 3(\text{mod } 5)$，$15\equiv 0(\text{mod } 5)$，等等。简单地说，$a(\text{mod } m)$告诉我们，$a$ 距离某个能够被 m 整除的数有多远。

在初等数论中，已证明"模"运算满足很多代数运算法则。例如，如果 $a\equiv b(\text{mod } m)$且 $c\equiv d(\text{mod } m)$，那么 $a+c\equiv b+d(\text{mod } m)$；对于乘法也同样成立。因此，模算术（有时也称其为"时钟算术"，因为模算术与模 12 系统的时钟中的钟点类似）与普通的算术非常类似。例如，平方同余 $13\equiv 3(\text{mod } 5)$，我们得到 $169\equiv 9(\text{mod } 5)$，这显然成立，因为 169 和 9 除以 5 后余数都为 4。记住这一概念后，现要我们证明下面的定理。

正整数 a 是两个数的平方和，仅当 a 不是与 $3(\text{mod } 4)$同余

的，即仅当 a 除以 4 后余数不是3。

证明

一个数 a 除以 4，它的余数只能是 0、1、2 或 3，即 $a\equiv0, 1, 2, 3 \pmod 4$。平方后，我们有 $a^2\equiv0, 1, 4, 9 \pmod 4$。但是 $4 \pmod 4\equiv0$，而 $9 \pmod 4\equiv1$，所以 $a^2\equiv0, 1 \pmod 4$。对于任意其他整数 b 也同样成立：$b^2\equiv0，1 \pmod 4$。把上面这两个同余式子加起来，我们得到 $a^2+b^2\equiv0，1，2 \pmod 4$。因此，两个数的平方和不会与 $3 \pmod 4$ 同余。

注意，这个定理只是 a 是两个数的平方和的必要条件，不是充分条件；也就是说，一个数可能不与 $3 \pmod 4$ 同余，但仍不是两个数的平方和。例如，12（$\equiv0 \pmod 4$）就是如此。对于前 20 个正整数，只有 8 个数是两个数的平方和：$2=1^2+1^2$、$5=1^2+2^2$、$8=2^2+2^2$、$10=1^2+3^2$、$13=2^2+3^2$、$17=1^2+4^2$、$18=3^2+3^2$ 和 $20=2^2+4^2$（如果把 0 算作平方数，则 1、4、9 和 16 也是两个数的平方和）。

我们不加证明地给出下面的定理，它给出一个数是两个数的平方和的充分必要条件。

整数 a 是两个数的平方和当且仅当 a 的素数因数分解中的任意与 $3 \pmod 4$ 同余的素数都在这个分解式中出现偶数次。[1]

这个定理解释了为什么 12 不是两个数的平方和。12 的素数因数分解是 $12=2\times2\times3$，因为素数 $3\equiv3 \pmod 4$ 在它的分解式中只出现一次，所以 12 不可能是两个数的平方和。另一方面，$18=2\times3\times3$，因为 3 出现两次，所以 18 是两个数的平方和。

下面的定理归功于丢潘图（参见第 5 章），它给出了从更简单的两个数的平方和“构造”两个数的平方和的方法。

如果两个整数都是两个数的平方和，则它们的积也是两个数的平方和。

证明

设 $p=a^2+b^2$，$q=c^2+d^2$。于是，

$$
\begin{aligned}
pq &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\
&= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \\
&= (ac)^2+2(ac)(bd)+(bd)^2+(ad)^2-2(ad)(bc)+(bc)^2 \\
&= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

这是两个数的平方和。另外，我们还有

$$pq=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 \qquad (2)$$

这给出了一个数可以用两种不同的方式表示成两个数平方和的可能。例如，取 5 和 10，它们都是两个数的平方和。我们有

$$
\begin{aligned}
50 &= 5\times10=(1^2+2^2)\times(1^2+3^2) \\
&= (1\times1+2\times3)^2+(1\times3-2\times1)^2=7^2+1^2
\end{aligned}
$$

或

$$50=(1\times1-2\times3)^2+(1\times3+2\times1)^2=(-5)^2+5^2=5^2+5^2$$

实际上，50 是可以用两种不同的方式表示成两个数的平方和的最小整数，下一个这样的数是 $65=1^2+8^2=4^2+7^2$。



当一个完全平方数是两个数的平方和时，我们就有一个毕达哥拉斯三元组（a，b，c），且有 $c^2=a^2+b^2$。有可能通过把 c 分解成更小的因子之积——其中每个因子都是两个数的平方和——来构造这样的三元组。例如，为了对 c=481 求一个三元组，我们用两种方式把 481 写成两个数

的平方和：

$$481=13\times 37=(2^2+3^2)\times(1^2+6^2)$$
$$=(2\times 1+3\times 6)^2+(2\times 6-3\times 1)^2=20^2+9^2$$

以及

$$481=(2\times 1-3\times 6)^2+(2\times 6+3\times 1)^2=16^2+15^2$$

因此

$$481^2=(20^2+9^2)\times(16^2+15^2)$$
$$=(20\times 16+9\times 15)^2+(20\times 15-9\times 16)^2=455^2+156^2$$

或者

$$481^2=(20\times 16-9\times 15)^2+(20\times 15+9\times 16)^2=185^2+444^2$$

实际上，我们可以得到更多三元组：

$$481^2=13^2\times 37^2=(5^2+12^2)\times(12^2+35^2)$$
$$=(5\times 12+12\times 35)^2+(5\times 35-12\times 12)^2=480^2+31^2$$

及

$$481^2=(5\times 12-12\times 35)^2+(5\times 35+12\times 12)^2=360^2+319^2$$

最后的三元组（360，319，481）出现在巴比伦泥板书普林顿 322（参见第 1 章）的第 6 行，而且泥板书中其他大三元组完全有可能也是用同样的方法得到的。上面这 4 个三元组可以用直径为 481 的圆的 4 个内接直角三角形表示（图 C-1）。

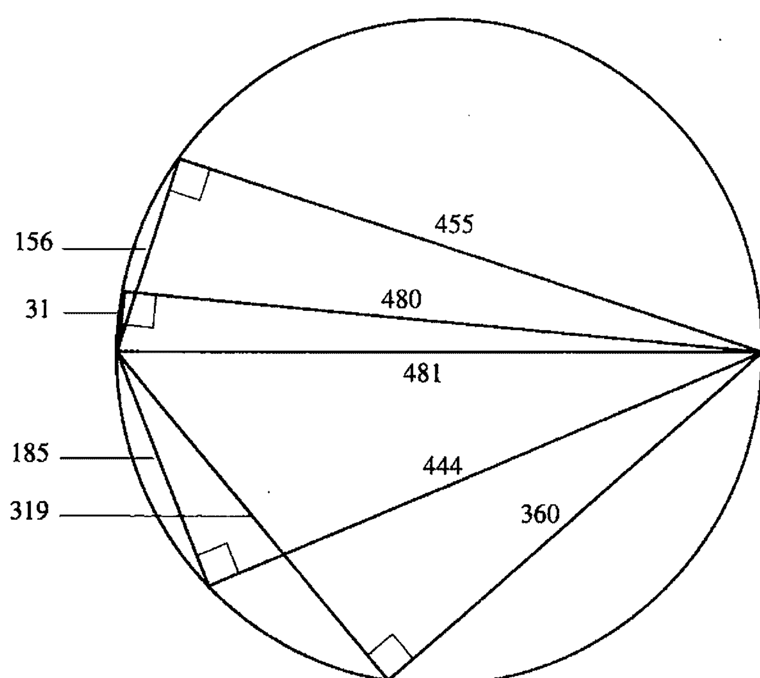


图 C-1　毕达哥拉斯三元组（31，480，481）、（156，455，481）、（185，444，481）和（319，360，481）的几何表示

注释和参考文献

[1] 关于证明，参见 Charles Vanden Eynden，*Elementary Number Theory* (McGraw-Hill, 1987)，pp.232-237。

附录D

$\sqrt{2}$是无理数的证明

我们不知道毕达哥拉斯学派是如何证明$\sqrt{2}$是无理数的，但是他们最有可能的证明可能是基于几何论证。[1]下面我们给出一个以算术基本定理为基础的证明。

我们使用反证法。假设$\sqrt{2}$是有理数，那么它可以写成两个整数的比的形式：

$$\sqrt{2}=m/n \tag{1}$$

两边平方，我们得到

$$m^2=2n^2 \tag{2}$$

根据算术基本定理，m和n可以唯一分解成素数之积，所以，设$m=p_1p_2\cdots p_r$且$n=q_1q_2\cdots q_s$。把这两个等式代入到方程(2)中，我们得到

$$(p_1p_2\cdots p_r)^2=2(q_1q_2\cdots q_s)^2$$

或者

$$p_1\,p_1p_2\,p_2\cdots p_r\,p_r=2\,q_1\,q_1q_2\,q_2\cdots q_s\,q_s \tag{3}$$

现在，在这些素数p_i、q_i中可能出现素数2（如果m或者n是偶数，它一定出现）。如果它出现，那么在方程(3)的左边它必定出现偶数次（因为每一个素数都出现两次），而在右边则出现奇数次（因为2已经在这里出

现了一次)。即使 2 在 p_i 或 q_i 中不出现，这种情况也是成立的，此时 2 在左边不出现，但是它在右边出现一次。无论是哪种情况，我们都得到一个矛盾的结果：因为素数因数分解是唯一的，素数 2 不能在一个方程的一边出现偶数次，而在另一边出现奇数次。因此方程(3)，也就是方程(1)不成立：$\sqrt{2}$ 不能写成两个整数的比的形式，因此它一定是无理数。

可以使用同样的证明方法来证明每一个素数的平方根都是无理数。

按希腊人的说法，无理数是不可以用单位度量的，两个数不能有共同的度量。因此，如果 $\sqrt{2}$ 可以用 1 度量，那么一定存在一条长度为 p 的线段，它能经过精确次数的重复而分别成为 $\sqrt{2}$ 和 1，即 $\sqrt{2}=mp$ 且 $1=np$，其中 m 和 n 是正整数。用第二方程除以第一个方程，我们得到 $\sqrt{2}=mp/np=m/n$，这是一个有理数，与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾。

注释和参考文献

[1] 参见伊夫斯的著作，p.84；对于其他证明，可以参见 pp.82-83 和 356-357。

附录 E

阿基米德的外切多边形公式

我们希望找到用外接于圆的正 n 边形的边长 s_n 求得外接于同一圆的正 $2n$ 边形的边长 s_{2n} 的公式。设这个圆的半径为 1，如图 E-1 所示。（图中给出了一个正方形和一个正八边形，而我们的证明完全是一般性的。）设 AB 是正 $2n$ 边形的一条边，它的中点是 C。AB 是这个圆在 C 点的切线，所以 $\angle OCB=90°$。延长 OC 到正 $2n$ 边形的顶点 E。因为 $OD\perp ED$ 且 $BC\perp EC$，我们有 $\angle EOD=\angle EBC$。因此，三角形 EOD 和三角形 EBC 相似，所以有

$$\frac{ED}{OD}=\frac{EC}{BC} \tag{1}$$

现在，$ED=s_n/2$，$OC=OD=1$，$EC=OE-OC=\sqrt{OD^2+ED^2}-OC=\sqrt{1^2+(s_n/2)^2}-1$，且 $BC=s_{2n}/2$。把这些结果代入到方程(1)，我们得到

$$\frac{(s_n/2)}{1}=\frac{\sqrt{1^2+(s_n/2)^2}-1}{(s_{2n}/2)} \tag{2}$$

求解方程(2)，用 s_n 表示 s_{2n}，我们得到阿基米德公式：

$$s_{2n}=\frac{2\sqrt{4+s_n^2}-4}{s_n}$$

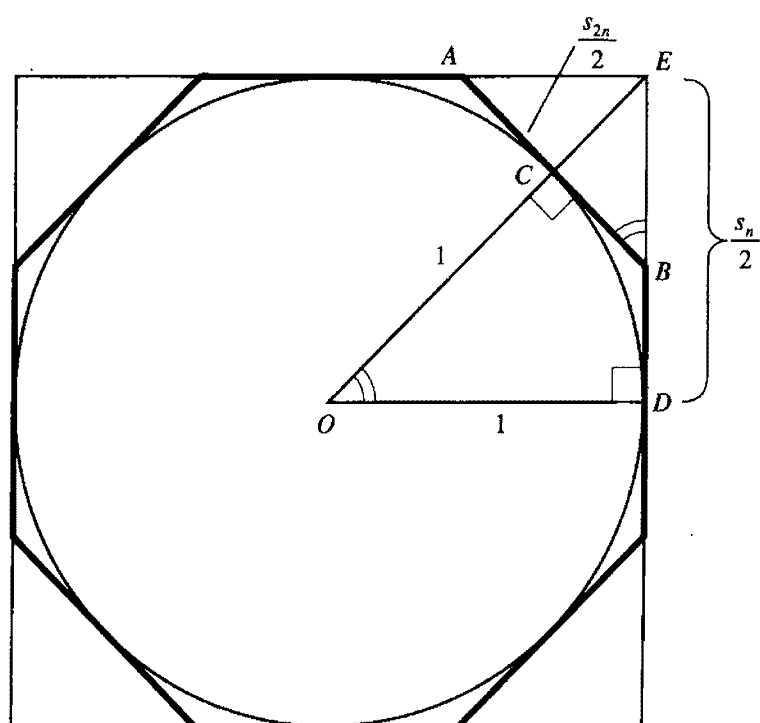


图 E-1　外接正多边形中 s_n 与 s_{2n} 间的关系

附录 F

第 7 章的若干公式的证明

1．为了求对数螺旋线长度，我们使用极坐标系下的弧长公式（参见第 7 章）：

$$s=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

这一螺旋线的极坐标方程是 $r=\mathrm{e}^{a\theta}$，其中 a 为常数。微分后，得到 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta=a\mathrm{e}^{a\theta}=ar$。因此

$$\begin{aligned}s&=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+(ar)^2}\mathrm{d}\theta=\sqrt{1+a^2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{e}^{a\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(\mathrm{e}^{a\theta_2}-\mathrm{e}^{a\theta_1})\end{aligned}\tag{1}$$

其中，θ_1 和 θ_2 分别是积分的下限和上限。

假设 $a>0$；即 r 随 θ 的增大而增大（左螺旋；参见图 F-1)。在方程(1)中令 θ_2 固定，并令 $\theta_1\to-\infty$，我们有 $\mathrm{e}^{a\theta_1}\to0$，因此，

$$s_\infty=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\mathrm{e}^{a\theta_2}=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}r_2\tag{2}$$

因此，对于左螺线，螺旋线上任意一点到极的弧长有有限值。如果这个螺线是右螺旋（$a<0$），令 $\theta_1\to+\infty$，可以得到类似的结论。

方程(2)右边的表达式可以用几何方式加以解释。因为 a 可以是任意正或负实数值，我们可以作替换 $a=\cot\alpha$，并利用等式 $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$ 来

重写方程(2)为

$$s_\infty = r\sec\alpha \tag{3}$$

其中，我们去掉了 r 的下标“2”。参照图 F-2，并取 P 为测定到极的弧长的点，我们有 $\sec\alpha=PT/OP=PT/r$。因此，$PT=r\sec\alpha=s_\infty$；即沿着螺旋线上的点 P 到极的弧长等于螺旋线上 P 和 T 之间的切线长。[1]

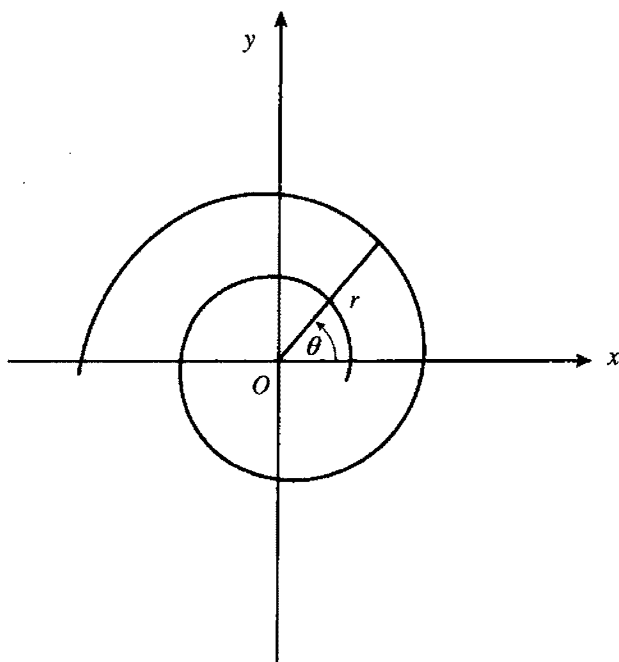


图 F-1　左对数螺旋线

2．为了求摆线的长度，我们利用它的参数方程（参见第7章）：

$$x=a(\theta-\sin\theta), y=a(1-\cos\theta), \tag{4}$$

其中，θ的取值范围是 0 到 2π。所以一段拱形弧的长度是

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)^2+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta \tag{5}$$

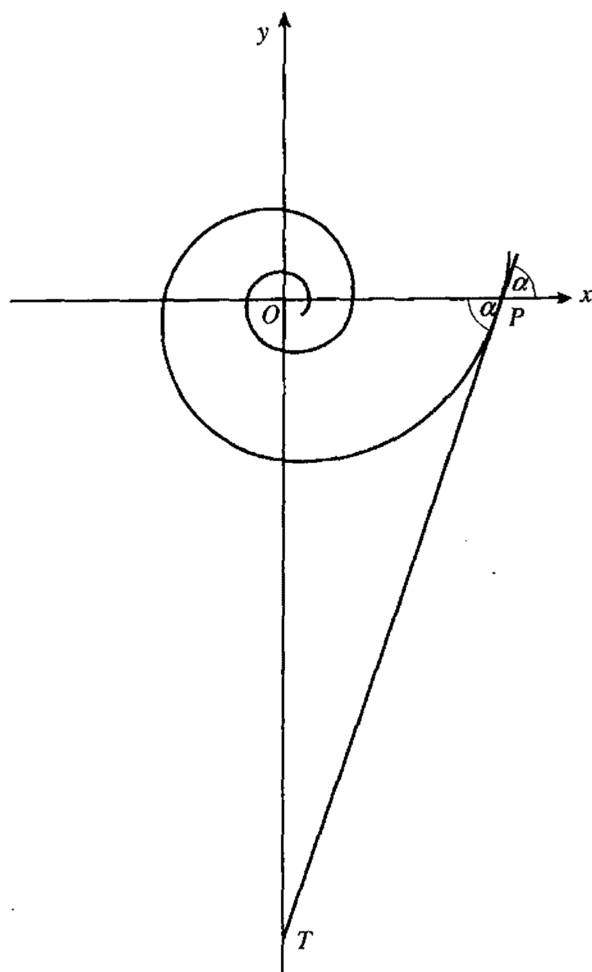
从参数方程出发，我们得到 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta=a(1-\cos\theta)$，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta=a\sin\theta$，所以有

$$\begin{aligned}\sqrt{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)^2+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)^2}&=a\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\\&=a\sqrt{2(1-\cos\theta)}=2a\sin\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

在这里，我们使用了等式 $\sin^2(\theta/2)=(1-\cos\theta)/2$。把它代回到方程(5)中，我们得到

$$s=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=-4a\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(\cos\pi-1)=8a \tag{6}$$

因此，摆线的一个拱形弧的弧长是生成圆半径的8倍。有趣的是，π没有出现在这一结果中（它出现在一个弓形弧线下的面积的表达式中，这一面积是 $3\pi a^2$）。



图F-2　求数螺旋线的长度

3．为了求星状线的长度，我们从它的隐式方程 $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ 开始。把

这个方程微分后，我们得到 $2/3x^{-1/3}+2/3y^{-1/3}y'=0$，根据这个方程，我们得到 $y'=(y/x)^{1/3}$。为了求这段弧长，我们需要表达式 $\sqrt{1+y'^2}$ 。我们有

$$1+y'^2=1+(y/x)^{2/3}=(x^{2/3}+y^{2/3})/x^{2/3}=1/x^{2/3}=x^{-2/3}$$

所以有 $\sqrt{1+y'^2}=x^{-1/3}$。因此，

$$s=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{-1/3}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_0^1=3/2 \tag{7}$$

即 1/4 星状线的弧长是生成棒长度的 3/2。[2]

注释和参考文献

[1] 关于对数螺旋线的更多内容可以在《e 的故事》的第 11 章，pp.135-139 和附录 6 中找到，上文的内容就来自于那里。

[2] 关于摆线的更多内容可以参阅《三角之美》，pp.98-101。

附录G

方程 $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ 的推导

我们在第10章得到了，当长度为1的梯子的顶端从一面墙滑下时，梯子所有可能的位置所形成曲线的线方程：$1/\alpha^2+1/\beta^2=1$，它的图像就是星状线。我们的目标是求这一曲线的直角坐标方程。

二维曲线由形如 $f(x, y) = 0$ 的方程给出。拥有共同性质的曲线族可以由下面的方程描述：

$$f(x,\ y,\ c)=0 \tag{1}$$

其中，c 是一个参数，它的值随曲线的变化而改变。当这个族中的两个成员相交时，有 $f(x,\ y,\ c_1)=f(x,\ y,\ c_2)$，我们也可以把这个等式写成下面的形式：

$$\frac{f(x,y,c_1)-f(x,y,c_2)}{c_1-c_2}=0$$

这个方程当 $c_1\neq c_2$ 时成立，事实上，它的左边是微分商 $\Delta f/\Delta c$ 的形式。当 $c_1\to c_2$ 时，这个方程变成

$$\frac{\partial f}{\partial c}=0 \tag{2}$$

其中，我们使用了偏导数符号 ∂ 来表明在微分过程中 x 和 y 保持不变。当方程(1)和(2)结合到一起时，它们就是这个曲线族中邻近曲线持续相交

而形成的包络线的参数方程。通过消去这些方程之间的参数 c，我们可以找到这个包络线的直角坐标方程。这个梯子的方程是

$$\alpha x+\beta y=1 \tag{3}$$

其中，α和β通过下面的线方程相关联

$$1/\alpha^2+1/\beta^2=1 \tag{4}$$

解方程（4）求β，我们得到$\beta=\alpha/\sqrt{a^2-1}$。把这个等式代入方程(3)，得到

$$\alpha x+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}y=1$$

或者

$$\alpha\left[x+\frac{y}{(\alpha^2-1)^{1/2}}\right]=1 \tag{5}$$

这就是切线族的方程，其中α取代 c 充当参数。对于上面的方程关于α微分并化简，得到

$$x-\frac{y}{(\alpha^2-1)^{3/2}}=0 \tag{6}$$

现在，我们必须消掉方程(5)和(6)中的α。根据方程(6)，得到

$$(\alpha^2-1)^{3/2}=y/x$$

因此有 $\alpha^2-1=(y/x)^{2/3}$，$\alpha^2=1+(y/x)^{2/3}=(x^{2/3}+y^{2/3})/x^{2/3}$

最后，得到$\alpha=(x^{2/3}+y^{2/3})^{1/2}/x^{1/3}$。把这个结果代入到方程(5)，得到

$$\frac{(x^{2/3}+y^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}}\left[x+\frac{y}{(y/x)^{1/3}}\right]=1 \tag{7}$$

括号中的表达式可以化简成

$$x+y(y/x)^{-1/3}=x+y^{2/3}x^{1/3}=x^{1/3}(x^{2/3}+y^{2/3})$$

所以，方程(7)变成

$$\frac{(x^{2/3}+y^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}}\cdot x^{1/3}(x^{2/3}+y^{2/3})=1$$

消去 $x^{1/3}$ 并合并（$x^{2/3}+y^{2/3}$）的幂，这一表达式化简成$(x^{2/3}+y^{2/3})^{3/2}=1$，由此我们最终得到

$$x^{2/3}+y^{2/3}=1$$

这一相当长的转换过程表明，在某些情况下，线坐标比直角坐标更适合描述曲线。

附录 H

谜题的解

蜘蛛和苍蝇谜题（补充 10）可以通过压平矩形盒子而得到解决，就像我们在把鞋盒扔进回收箱时把它压平一样。实际上可以用三种方法压平盒子（参见图 H-1，图中只给出相关的面）。对于情况(a)，距离 $d=1+30+11=42$ 英尺。对于其余情况，我们需要毕达哥拉斯定理。对于情况(b)，蜘蛛和苍蝇的水平距离是 $1+30+6=37$ 英尺，而垂直距离是 $6+11=17$ 英尺，所以 $d=\sqrt{37^2+17^2}=\sqrt{1658}\approx 40.7$ 英尺。对于情况(c)，水平距离是 $1+30+1=32$ 英尺，而垂直距离是 $6+12+6=24$ 英尺，所以 $d=\sqrt{32^2+24^2}=\sqrt{1600}=40$ 英尺。因此，情况(c)给出最短距离。

你也许会问：因为蜘蛛不能直接飞到它的猎物那里，它是如何知道要走什么路线呢？为了回答这个问题，我们需要一点三角学的知识。设这条路径的方向与最接近蜘蛛的边的垂线的夹角是α。根据图 H-1c，我们有 $\tan\alpha=24/32=3/4=0.75$，$\alpha\approx 36.9°$。因此，这个蜘蛛以与垂直方向成大约 37° 角向上爬到天花板，然后再设定一个与“北”（这个房间的最长边）成 37° 角的轴，沿着这个轴爬过天花板、前面墙壁、地板，然后与垂直方向成 37° 角向上到达对面的墙上，这样，蜘蛛就会抓到它的猎物（假设苍蝇一直在等着它的敌人的到来）。整个路径要使蜘蛛经过这个房间六面墙中的五面，它表明，对于所考虑的特殊面，最“直接”的路径(a)（即测地线）不一定总是最短的可能路径。[1]

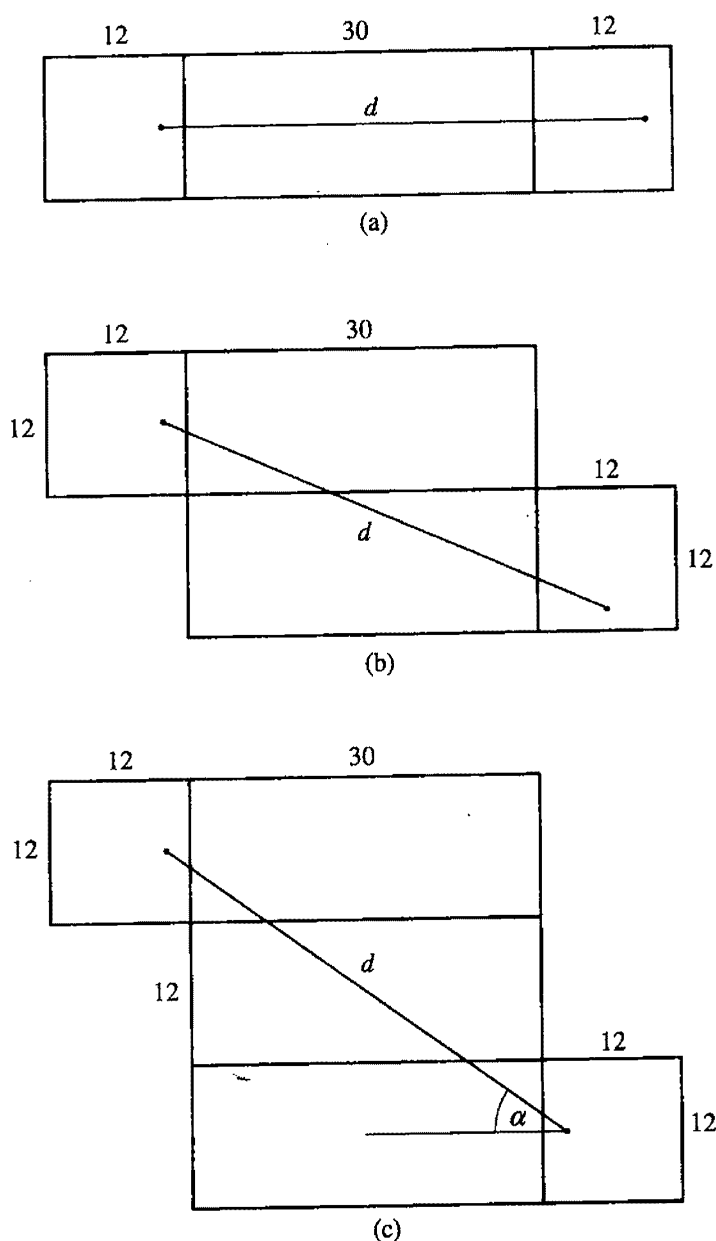


图 H-1　蜘蛛和苍蝇：三条可能路径



毕达哥拉斯方块拼图（补充 10）的解如图 H-2 所示。

要求葡萄藤的长度，我们注意到它绕着树缠绕了 7 次，头部到底部

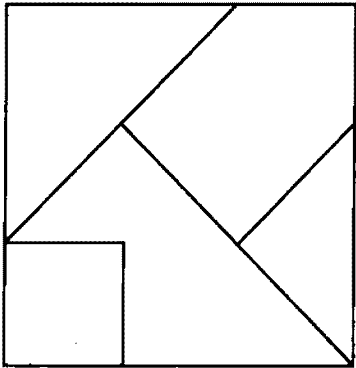


图 H-2　毕达哥拉斯方块拼图的解



都被拉起来。假设这棵树有圆柱形的树干，我们可以把树干展开得到如图 H-3 所示的 Z 字形图案，其中平行的两个点表示树干上的同一个点。每个三角形的底是 3 尺，高是 20/7 尺，所以每条斜边的长度是 $\sqrt{3^2+(20/7)^2}=\frac{\sqrt{841}}{7}=29/7$，因为有 7 个这样的三角形，所以总长度是 29 尺。

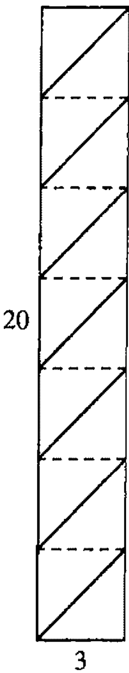


图 H-3　缠绕着的葡萄藤



为了求从蛇洞到蛇与孔雀相遇点之间的距离，我们利用图 H-4。孔雀在 P 点，洞在 H 点。看到蛇时，它在 S 点，相遇点是 M。设 $HM=x$, $PM=MS=d$。所以，我们有 $d^2=15^2+x^2$ 和 $d+x=45$。重写第一个方程为 $d^2-x^2=(d+x)(d-x)=45(d-x)=15^2=225$，得到 $d-x=5$。对 $d+x=45$ 和 $d-x=5$ 解方程，得到 $x=20$ 腕尺，而 $d=25$ 腕尺。这表明三角形 PHM 是毕达哥拉斯三角形（15，20，25），即把三角形（3，4，5）放大了 5 倍。

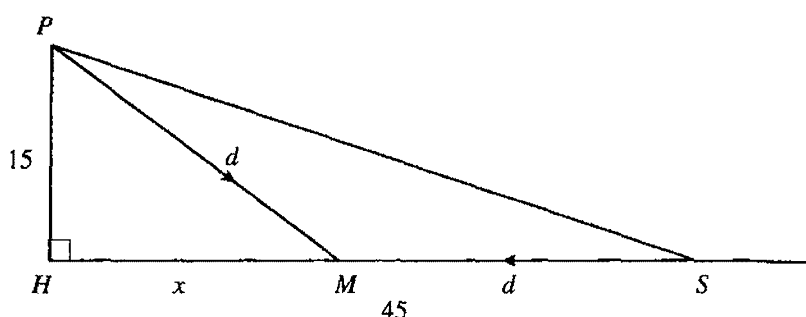


图 H-4　蛇与孔雀

注释和参考文献

[1] 在地球仪上也发生类似的情况。有相同纬度的两个城市之间的最短距离不在纬度圆上，而是通过这两个城市的最大圆上的一段弧。例如，洛杉矶和东京（分别为北纬 34°和北纬 35°）之间的最大圆路径偏北弯曲，并环绕阿留申群岛。

大事年纪

注意：为了避免重复，我使用缩写 PT 代表毕达哥拉斯定理。

约公元前 1800	在美索不达米亚发现的两个泥板书 YBC 7289 和普林顿 322 证明巴比伦人知道 PT。
约公元前 600	在一组名为 sulbasturas 的系列著作中，其中作者包德哈亚那说："以正方形对角线上拉直的绳子为边生成的正方形是原来正方形的两倍。"这是 PT 的特殊情况——45°-45°-90° 三角形。后来在迦旃延所写的 sulbastura 中给出了一般情况，还给出了如何使用毕达哥拉斯三元组构建梯形祭坛的方法。
约公元前 570	毕达哥拉斯出生在萨摩斯岛。遍游了古代世界之后，他创办了毕达哥拉斯学园。他发现音乐和声的规律依赖于整数比，于是得出结论：数统治宇宙。这就是毕达哥拉斯的座右铭。
约公元前 540	毕达哥拉斯证明 $\sqrt{2}$ 是无理数，并证明了 PT。但是这两个证明都遗失了。
公元前 326	亚历山大大帝统治古代世界，并在埃及的南部建造了一座新城——亚历山大城。它的大学和著名的图书馆吸引了来自当时世界各个角落的学者。
约公元前 300	欧几里得汇编了《几何原本》，这本书是当时所知数学现状的总结，也是至今为止影响最深远的数学教科书。PT是该书的命题 I-47，以及附有不同证明的

	命题 VI-31。PT 的逆命题是命题 I-48。
约公元前 250	锡拉库扎的阿基米德把 PT 运用于一系列内接和外接多边形来近似π的值，他证明$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{10}{70}$。
公元前二世纪	托勒密证明了“托勒密定理”：在任意圆内接四边形 $ABCD$ 中，$AB\times CD+BC\times DA=AC\times BD$。当 $ABCD$ 是矩形时，这一定理就是 PT。这一定理在他的巨作《至大论》中出现。
公元前 100—公元 100	海伦证明了公式 $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，这一公式使用三角形的边和周长 $s=(a+b+c)/2$ 表示这个三角形面积（这个公式可能已被阿基米德证明了）。海伦是基于比例法证明的。现代教科书中则利用两次 PT 证明这一定理。
汉代（公元前 206—公元 221）	在中国，PT 称为*勾股定理*。中国最早关于数学的著作之一《周髀算经》（是关于日晷仪和天体圆路径的算术经典著作，确切的年代不详）采用对话式描述了 PT，并给出一个割补式证明。
公元三世纪	亚历山大的帕普斯证明了对任意三角形都成立的 PT 的一般形式。帕普斯撰写了《欧德莫斯概要》，这本著作包括他自己对《几何原本》卷 I 的注释以及到欧几里得为止的希腊几何学的历史概况。
389	第一次焚烧亚历山大城图书馆。
约 390	亚历山大城的塞翁编写了《几何原本》的修正版，大部分现代版本的书都是从这本著作而来的。
641	第二次焚烧亚历山大城图书馆。

公元九世纪	伊本·奎拉证明了涉及任意三角形的 PT 的一般形式。
11 世纪	印度的婆什迦罗给出了PT的“无字证明”，这一证明等同于中国证明，证明中只加了一个词“看”。 格拉多把欧几里得的《几何原本》以及托勒密的《至大论》从阿拉伯文翻译成拉丁语，使得欧洲的学者能够更容易理解这两本著作。
11 世纪—13 世纪	1088 年在博洛尼亚创办了欧洲的第一所大学；1200 年在巴黎创办巴黎大学；1214 年创办了牛津大学；1222 年创办了帕多瓦大学；1231 年创办了剑桥大学。
1453	君士坦丁堡沦陷到土耳其人手里，他们把它的名字改为伊斯坦布尔。这一年被认为是中世纪的结束。
1454	约翰内斯·古腾堡发明了活字印刷。
1482	第一本印刷版的《几何原本》在威尼斯出现。
1570	《几何原本》第一个英文版本出版。
1593	韦达使用一种变形的阿基米德方法发现了无穷积：$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\times\cdots$。
1637	笛卡儿发明坐标（分析）几何，有效地把几何和代数统一起来。一个直接结果就是平面上两点之间的距离 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。 费马猜测，除 $n=1, 2$ 外，方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解。这一猜想就是费马大定理（FLT）。last 指的是 FLT 是当时还未证明的最后一个费马猜想，1994 年，这个猜想最终得到了证明。

1645 托里拆利使用PT的无穷小板本对对数螺旋线求长。他指出从螺旋线上任意点到极的弧长是有限的。这是我们所知道的第一个非代数曲线求长。

1649 欧几里得的PT证明出现在劳伦特·德拉海尔的油画《几何的寓言》上。

1658 克里斯托弗·雷恩对摆线求长。他指出一个拱形弧的弧长等于生成圆半径的八倍。

1666—1676 牛顿和莱布尼茨分别独立发现了微分和积分。从而使数学家可以对很多代数或者非代数曲线求长。

1731 在克莱洛编写的关于空间曲线的著作中第一次出现了距离公式。

1734 欧拉证明了无穷极数 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots$ 收敛于 $\pi^2/6$。这一证明间接证明了PT。

1753 欧拉对于 $n=3$ 证明了FLT。

1820 据说高斯提议在西伯利亚森林中切割出一个巨大的直角三角形及其各边上的正方形，以此来作为向月亮居民传达我们的PT知识的信号。尽管这个故事没有得到证实，但是它一直不断出现，并进入凡尔纳经典科幻小说《从地球到月球》(1865)。

1828 普吕克把线坐标引入到几何中。单位圆方程是 $\alpha^2+\beta^2=1$，其中 α 和 β 是与这个单位圆相切的切线的线坐标。

1854 黎曼发表了他的《论作为几何基础的假设》的博士学位演讲。在这篇论文中，他给出了多维空间和弯曲空间的概念，还给出了度量 $ds^2=\sum_{ij}a_{ij}dx_idx_j$ 作为PT的一般形式。根据黎曼的思想，每一个空间都

有它自己的度量，这一度量随着的点的改变而变化。事实上，黎曼说的是空间的这一性质是局部的而不是全局的：每一个点都有它自己的 PT 形式。

1876　詹姆斯·加菲尔德是未来的第 20 任美国总统，他给出了 PT 的一个原创证明。约 1876 年，加菲尔德“在与其他议员进行数学讨论中偶然发现这一证明”。

1888　盲人姑娘库利奇给出一个类似于婆什迦罗证明 PT 的割补证明。

1905　爱因斯坦发表了他的狭义相对论，其中洛伦兹变换起到了关键作用。PT 的印记遍及相对论的几乎所有公式中。

1907　施米特和福利叶扩展了希尔伯特的早期工作，引入了函数空间的概念，这是一个无穷维向量空间，在这个空间中每一个“向量”是一个函数。函数到原点的“距离”是 $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x}$ ，条件是这个积分存在。在现代物理学中，这些希尔伯特空间起着至关重要的作用。

1908　闵可夫斯基对狭义相对论给出一个四维空间解释。在这个解释中，表达式 $x^2+y^2+z^2+(ict)^2$ 是洛伦兹变换下的不变量，其中 $i=\sqrt{-1}$ ，c 是光速。他还把空间和时间统一到一个实体——时空。时空中两个事件之间的距离是 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+(m_2-m_1)^2}$ ，其中 $m=ict$。

1916　爱因斯坦发表了广义相对论，其中，黎曼的四维空

间度量 $ds^2=\sum_{ij} g_{ij}dx_i dx_j$ 起到了关键性的作用。

1927　卢米斯出版了《毕达哥拉斯命题》。他在 1907 年开始写这本书，1940 年（这年他去世）又作了修改。修改后的版本包含了毕达哥拉斯定理的 371 个证明、“毕达哥拉斯的珍品”和 5 个毕达哥拉斯方块拼图。

1934　俄亥俄州的扬斯敦市年仅 19 岁的斯坦利 · 佳申斯基给出了可能是 PT 的最短的证明。

1938　印地安那州南本德中央高中的学生，年仅 16 岁的安 · 康迪给出了 PT 的一个原创证明。

1955　希腊的萨摩斯岛的蒂加尼镇重新以毕达哥拉斯命名。毕达哥拉斯的雕像矗立在这个镇的港口。

1958　索尔 · 查普林演唱的由强尼 · 曼塞作词的“斜边的正方形”这首歌出现在电影《戏班小丑》之中。

1993　普林斯顿大学的怀尔斯宣布他证明了费马大定理，这一消息刊登在纽约时报的头版上。

1994　怀尔斯修改了他的长达 200 页的证明中的一个错误。现在，人们认定 FLT 已得到证明。

1996　亚历山大创办了网站“毕达哥拉斯定理及其众多证明”（www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml）。此后，又有很多类似的网站出现。

参考书目

Aaboe, Asger. *Episodes from the Early History of Mathematics*. New York: Random House. 1964.

Abbott, Edwin A. *The Annotated Flatland: A Romance of Many Dimensions*, With introduction and notes by Ian Stewart. Cambridge, Mass.: Perseus Publishing, 2002.

Ball. W. W. Rouse. *A Short Account of the History of Mathematics*. 1908. Rpt. New York: Dover, 1960.

Baron, Margaret E. *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. 1969. Rpt. New York: Dover. 1987.

Boyer, Carl B. *History of Analytic Geometry: Its Development from the Pyramids to the Heroic Age*. 1956. Rpt. Princeton Junction, N.J.: Scholar'S Bookshelf, 1988.

——. *A History of Mathematics*. 1968. Rev. ed. New York: John Wiley, 1989.

——. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. New York: Dover, 1959.

Burton, David M. *The History of Mathematics: An Introduction*. Boston: Allyn and Bacon. 1985.

Cajori, Florian. *A History of Mathematics*. 1893. 2d ed. New York: Macmillan, 1919.

——. *A History of Mathematical Notations*. 2 vols. 1929. Rpt. Chicago: Open Court, 1952.

Coolidge. Julian Lowell. *A History of Geometrical Methods*. 1940. Rpt. New York: Dover, 1963.

Courant. Richard. *Differential and Integral Calculus*. 2 vols. 1934. Rpt. London and Glasgow: Blackie and Son, 1956.

Courant, Richard, and Herbert Robbins. *What Is Mathematics*? 1941. Rpt. New York and Oxford: Oxford University Press, 1996.

Dantzig, Tobias. *The Bequest of the Greeks*. New York: Charles Scribner's Sons, 1955.

——. *Number: The Language of Science*. Ed. Joseph Mazur; foreword by Barry Mazur. New York: Pi Press, 2005.

Devlin, Keith. *Mathematics: The Science of Patterns*. New York: Scientific American Library, 1997.

——. *Mathematics: The New Golden Age*. New York: Columbia University Press. 1999.

Dunham, William. *Journey through Genius: The Great Theorems of Mathematics*. New York: John Wiley and Sons, 1990.

——. *The Mathematical Universe: An Alphabetical Journey through the Great Proofs, Problems, and Personalities*. New York: John Wiley and Sons, 1994.

Euclid: *The Elements*, translated with introduction and commentary by Sir Thomas Little Heath. 3 vols. New York: Dover, 1956.

Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. Fort Worth, Tex.: Saunders, 1992.

——. *Great Moments in Mathematics (Before 1650)*. Washington, D. C.: Mathematical Association of America, 1983, lecture 4.

——. *A Survey of Geometry: Revised Edition*. Boston: Allyn and Bacon, 1972.

Frederickson, Greg N., *Dissections: Plane & Fancy*. Cambridge. U. K.: Cambridge University Press, 1997.

——. *Hinged Dissections: Swinging and Twisting*. Cambridge, U. K.: Cambridge University Press, 2002.

——Friedricks, Kurt Otto. *From Pythagoras to Einstein*. Washington, D. C.: Mathematical Association of America, 1965.

Gillispie, Charles Coulston, ed. *Dictionary of Scientific Biography*. 16 vols. New York: Charles Scribner's Sons. 1970–1980.

Greenberg, Marvin Jay. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. San Francisco: W. H. Freeman. 1973.

Guggenheimer, Heinrich W. *Plane Geometry and Its Groups*. San Francisco: Holden-Day, 1967.

Heath, Sir Thomas Little. *A Manual of Greek Mathematics*. Oxford: Oxford University Press. 1931.

——. *The Works of Archimedes*. 1897; with Supplement, 1912. Rpt. New York: Dover, 1953.

Heilbron, J. L. *Geometry Civilized: History, Culture, and Technique*. Oxford: Oxford University Press, 1998.

Henderson, Linda Dalrymple. *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*. Princeton, N. J.: Princeton University Press. 1983.

James, Jamie. *The Music of the Spheres: Music, Science, and the Natural Order of the Universe*. New York: Copernicus. 1993.

Jeans, Sir James. *The Growth of Physical Sciences*. Cambridge, U. K., and New York: Macmillan, 1948.

Joseph, George Gheverghese. *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. 1991. Rpt. Princeton, N. J.: Princeton University Press. 2000.

Kaku, Michio. *Hyperspace: A Scientific Odyssey through Parallel Universes, Time Warps, and the 10th Dimension*. New York: Anchor Books, 1994.

Kline, Morris. *Mathematical Thoughtfrom Ancient to Modem Times*. 3 vols. New York and Oxford: Oxford University Press, 1990.

Kramer, Edna E. *The Nature and Growth of Modern Mathematics*. 1970. Rpt. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1981.

Krauss, Lawrence M. *Hiding in the Mirror: The Mysterious Allure of Extra Dimensions, from Plato to String Theory and Beyond*. New York: Viking, 2005.

Loomis, Elisha Scott. *The Pythagorean Proposition*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics. 1968.

Mankiewicz, Richard. *The Story of Mathematics*. Princeton, N. J.: Princeton University Press. 2001.

Maor, Eli. *To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite*. Princeton. N. J.: Princeton University Press. 1991.

——. *e: The Story of a Number*. Princeton, N. J.: Princeton University Press. 1994.

——. *Trigonometric Delights*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1998.

Nelson, Roger B. *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*. Washington, D. C.: Mathematical Association of America, 1993.

——. *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking*. Washington, D. C.: Mathematical Association of America, 2000.

Neugebauer. Otto. *The Exact Sciences in Antiquity*. 1957. Rpt. New York: Dover, 1969.

Penrose, Roger. *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. New York: Alfred A. Knopf, 2005.

Simmons, George F. *Calculus with Analytic Geometry*. New York: McGraw-Hill, 1985.

Singh. Simon. *Fermat's Enigma: The Epic Quest to Solve the World's Greatest Mathematical Problem*. New York: Walker. 1997.

Smith. David Eugene. *History of Mathematics*. Vol. 1: *General Survey of the History of Elementary Mathematics*. Vol. 2: *Special Topics of Elementary Mathematics*. 1923–1925. Rpt. New York: Dover. 1958.

Swetz, Frank J., ed. *From Five Fingers to Infinity: A Journey through the History of Mathematics*. Chicago and LaSalle, Ill.: Open Court, 1995.

Swetz, Frank J., and Kao, T. I. *Was Pythagoras Chinese? An Examination of Right Triangle Theory in Ancient China*. University Park. Penn.: Pennsylvania State University Press. and Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1977.

Taylor. C. A. *The Physics of Musical Sounds*. London: English Universities Press, 1965.

Toubis. Michael S. A., publisher. *Samos, Icaria & Fournoi: History-Art-Folklore-Routes*. Nisiza Karela, Koropi, Attiki (Greece), 1995.

van der Waerden, Bartel Leendert. *Science Awakening: Egyptian, Babylonian and Greek Mathematics*. 1954. Trans. Arnold Dresden, 1961. Rpt. New Yrork: John Wiley, 1963.

Weisstein, Eric W. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. Boca Raton, Fla.: CRC Press, 1999.

Wheeler, John Archibald. *A Journey Znto Gravity and Spacetime*. New York: Scientific American Library, 1990.

Wilson, Robin J. *Stamping through Mathematics*. New York: Springer-Verlag, 2001.

Yates, Robert C. *Curves and Their Properties*. 1952. Rpt. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1974.

网站

Pythagorean Theorem and Its Many Proofs: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index. shtml

Pythagoras's Theorem: http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/java/html/pytha- goras.html

Ask Dr. Math, High School Archive: http://mathforum.org/library/drmath/drmath.high.html

Pythagorean Theorem—From MathWorld: http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheo-rem.Html

The Theorem of Pythagoras: http://www.math.uwaterloo.ca/navigation/ideas/grains/pythagoras. shtml

A Proof of the Pythagorean Theorem by Liu Hui: www.staff.hum.ku.dk/dbwagner/Pythagoras/Pythagoras.html

History Topics Index: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/indexes/History-Topics .html

图片声明

此处未声明的图片均为作者自己提供。括号内的编号指图号。

彩色插图

Robin A. Wilson, *Stamping through Mathematics*, courtesy of Springer Verlag, New York (Plate 1)

Richard Mankiewicz, *The Story of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, NJ (Plate 2)

插图

Asger Aaboe, *Episodes from the Early History of Mathematics*, courtesy of Random House, New York (1.1a, 1.1b)

Anthony Ashton, *Harmonograph: A Visual Guide to the Mathematics of Music*, courtesy of Walker and Company, New York (2.2, 2.10)

Frank Drake and Dava Sobel. *Is Anyone Out There? The Scientific Search for Extraterrestrial Intelligence*, courtesy of Delacorte Press, New York (15.1)

Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, courtesy of Saunders College Publishing, Philadelphia (2.1)

Gilbert W. *Grosvenor*, ed., *National Geographic Political Globe: Index and Guide*, courtesy of the National Geographic Society, Washington, DC (12.2)

Arthur Koestler, *The Sleepwalkers*, courtesy of Macmillan Co., New York (2.11)

Elisha Loomis, *The Pythagorean Proposition*, courtesy of the National Council of Teachers of Mathematics, Ann Arbor, MI (8.1, 8.2, 8.3, 8.4)

Y. Ladijanski, *Geometry, Part I: Plane Geometry*, n. P., Jerusalem, Israel (3.4)

Richard Mankiewicz, *The Story of Mathematics*, courtesy of Princeton University Press, Princeton, NJ (5.5, 5.9)

Eli Maor, *e: The Story of a Number*, courtesy of Princeton University Press, Princeton, NJ (7.7, 13.1, App. F.1)

Eli Maor, *Trigonometric Delights*, courtesy of Princeton University Press,

Princeton, NJ (7.8, 8.5, 8.6, SB 9.2, SB 9.3)

Eli Maor, *To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite*, courtesy of Princeton University Press, Princeton, NJ (2.3)

Wolfgang Amadeus Mozart, Piano Concerto No. 16 in D Major, K. 451 (in full score), courtesy of Dover Publications, New York (16.1)

Joseph Needham, *Science and Civilisation in China*, courtesy of Cambridge University Press, Cambridge, UK (5.4)

O. Neugebaur, *The Exact Sciences in Antiquity*, courtesy of Dover Publications, New York (1.3)

New York Cares, promotional image, newyorkcares. org (S8.1)

Dale Seymour et a1., *Line Designs*, courtesy of Creative Publications, Palo Alto, CA (10.9)

David Eugene Smith, *History of Mathematics. Vol. 1: General Survey of the History of Mathematics*, courtesy of Ginn and Company, Boston (2.2, 5.11, 5.12)

Spiegel, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, courtesy of McGraw-Hill Book Company, New York (16.2)

TWA, promotional image, n. p. (S9.1)

The Pythagorean Theorem: A 4000-year History

勾股定理

悠悠4000年的故事

勾股定理是初等几何中最精彩、最著名和最有用的定理，从古巴比伦至今的悠悠 4000 年的历史长河里，它的身影若隐若现。许多重要的数学、物理理论中都能发现它的踪迹，甚至连邮票、T 恤、诗歌、散文、音乐剧中也能看到它的身影。

作者带领我们穿越历史的迷雾，从远古一路走到今天。欧几里得几何、代数几何、微积分、黎曼几何、爱因斯坦相对论，一个个我们熟悉的数学发现的背后无不渗透着勾股定理的影响，古典数学和现代数学的历史轨迹竟然一脉相承，从未偏离。历史的变迁、科学史上的重要发现，都随着勾股定理的翩翩起舞而一一展开。读者将为书中展现的壮丽史实而深深震撼，极大地丰富自己的视野。

Eli Maor　知名科普作家，以色列理工学院博士，曾在芝加哥洛约拉大学教授数学史课程。著有畅销书《三角之美：边边角角的趣事》、《e 的故事：一个常数的传奇》、《无穷之旅：关于无穷大的文化史》等。在各国期刊上发表过大量论文，涉及应用数学、数学史和数学教育等领域。



封面设计：于洋

图灵网站：www.turingbook.com　热线：(010) 51095186

反馈／投稿／推荐信箱：contact@turingbook.com

有奖勘误：debug@turingbook.com

分类建议　科普读物/数学

人民邮电出版社网址：www.ptpress.com.cn



ISBN 978-7-115-21691-5

定价：35.00 元